

# 单面展成磨齿法 齿轮齿圈径向跳动成因的研究

王立鼎

**摘要:** 本文阐述了单面展成磨齿法, 齿轮齿圈径向跳动成因的特殊性。分析了误差源及误差综合方法。提出了解析选位法及实验选位法安装齿坯, 减小齿圈径向跳动的途径。

## 一、前 言

齿圈径向跳动是用于综合检验的标准齿轮、插齿刀、剃齿刀以及小回差传动齿轮的重要质量指标。

在双面展成磨齿(如蜗杆砂轮和双碟形砂轮磨齿)以及双面展成切齿(如滚齿)过程中, 齿轮齿圈径向跳动的成因主要来自齿坯安装的综合几何偏心, 这在许多书刊中都有分析。而在单面展成磨齿中, 齿轮齿圈径向跳动的成因, 尚未见到详细的理论分析, 在生产实践中, 经常出现齿轮齿圈径向跳动的超差现象。

本文从理论上论述和分析了单面展成磨齿法齿轮齿圈径向跳动的误差成因及误差综合方法, 并提出了用于指导生产, 控制齿轮齿圈径向跳动的科学方法。

本文引用的主要符号

$m$  —— 齿轮的模数

$z$  —— 齿轮的齿数

$\alpha$  —— 齿轮在分度圆上的压力角 ( $^{\circ}$ )

$r$  —— 齿轮的分度圆半径 (mm)

$\delta$  —— 齿轮孔与磨齿心轴的配合间隙 (mm)

$e$  —— 齿轮的综合几何偏心量 (mm)

$e_s$  —— 由  $E$  转化到齿轮上的运动偏心 (mm)

$R$  —— 分度盘齿槽的工作圆半径 (mm)

$\Delta\gamma_x$  —— 机床分度系统的总角误差 (s)

$E$  —— 由  $\Delta\gamma_x$  简化成的机床分度系统总运动偏心 (mm)

$\Delta F_x$  —— 机床分度系统的累积误差 (mm)

$\Delta F_x$  —— 由  $\Delta\gamma_x$  引起的齿轮齿圈径向跳动 (mm)

$\Delta F_e$  —— 由  $e$  引起的齿轮齿圈径向跳动 (mm)

$\Delta F_r$  —— 齿轮的总的齿圈径向跳动 (mm)

$\Delta F_p$  —— 齿轮的周节累积误差 (mm)

$\Delta F_v$  —— 齿轮的公法线长度变动量 (mm)

$\theta$  ——  $e$  相对于  $e_s$  的导前角 ( $^{\circ}$ )

$\beta$ ——齿坯翻转轴与极轴之间的夹角 ( $^{\circ}$ )

## 二、单面展成磨齿法，齿轮齿圈径向跳动成因的特殊性

Y7125 (苏5892A、美2C)、Y7431 (苏5A893C、美4B) 和Y7432 (西德SRS—400) 等类型的齿轮磨床的工作原理，属于单面展成磨齿法。它的磨齿特点，与双面展成磨齿或滚齿法有所不同。它是在两次安装齿坯中，分别磨出齿轮的左齿廓和右齿廓的。

由单面展成磨齿法的特点而定，被加工齿轮的齿圈径向跳动，不仅来源于齿坯安装的综合几何偏心，而且，它还与机床分度系统的总角误差以及该误差传递到齿轮左右齿廓上的组合情况有关。就其综合几何偏心对齿圈径向跳动的规律而言，也和双面展成磨齿或滚齿法有所不同。

用双面展成法加工齿轮时，大致可用式 (1) 表达周节累积误差、齿圈径向跳动与公法线变动之间的关系：

$$\Delta F_z^2 = \Delta F^2 + \left( \frac{\Delta F_w}{2 \sin \alpha} \right)^2 \quad (1)$$

显然， $\Delta F_z > \Delta F$ 。

用单面展成磨齿法，经常出现  $\Delta F_z > \Delta F$  的情况。加工实例列于表 1。

表 1  $\Delta F_z$  与  $\Delta F$  数值的比较

$m$	1	1	1	1	1.5	2	2
$z$	48	100	105	112	80	54	120
$\Delta F_z$	0.012	0.021	0.024	0.016	0.018	0.018	0.016
$\Delta F$	0.018	0.020	0.014	0.008	0.010	0.018	0.010

## 三、齿圈径向跳动误差的来源与合成

(一) 由齿坯安装的几何偏心引起的齿圈径向跳动  $\Delta F_z$

图 1 表示用平面砂轮磨削  $M_1$  单侧齿廓的示意图。0 为齿轮磨床主轴的旋转中心， $O_1$  为被加工齿坯的几何中心。 $e$  为齿坯安装的综合几何偏心矢量，它由若干偏心矢量合成而得<sup>[1]</sup>：

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \quad (2)$$

在导前  $\vec{e}$   $90^{\circ}$  的方向上作极坐标系的极轴  $ox$ 。 $NN$  直线是磨完第一侧齿廓  $M_1$ ，调头安装，磨削第二侧齿廓  $M_2$  时的齿坯翻转轴，它与  $ox$  交成  $\beta$  角。

对于双面展成法加工的齿轮，齿圈径向跳动

$$\Delta F_z \approx 2e$$

在  $\vec{e}$  的方位上，有齿圈径向跳动误差曲线的两个极值点。

对于单面展成磨齿法则不同，由于齿坯在两次安装和磨削中形成左右齿廓，因此，产生的齿圈径向跳动  $\Delta F_z$  不仅与  $e$  的数值有关，而且，还与  $e$  引起左右齿廓上的  $\Delta F_{z1}$  和  $\Delta F_{z2}$  的

误差规律如何组合有关。亦即与选择翻转轴 $NN$ 的方位有关。

为了讨论问题方便,把 $M_2$ 的安装面翻转到 $M_1$ 的安装面上来,得到图2。 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 分别是磨削 $M_1$ 和 $M_2$ 时的综合几何偏心。令 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 与 $NN$ 的夹角相等,且

$$e_1 = e_2 = e \quad (3)$$

由 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 引起 $M_1$ 与 $M_2$ 上的径向位移分别为

$$\Delta h_1 = e_1 \sin \varphi = e \sin \varphi \quad (4)$$

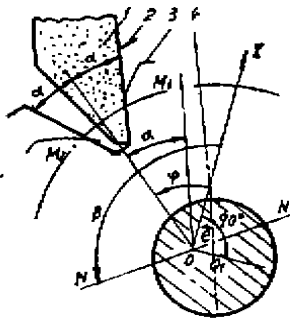


图1 几何偏心 $\vec{e}$ 的相位

- 1.平面砂轮; 2.假想齿条刀; 3.被磨齿轮;  
4.磨齿心轴。

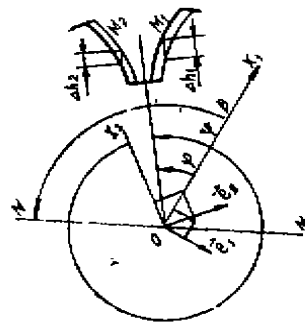


图2  $e$ 引起的 $\Delta F$ 。

$$\Delta h_2 = e_2 \sin \psi = -e \sin(-2\beta + \varphi) \quad (5)$$

齿轮的任一齿槽所产生的齿圈径向跳动应为

$$\begin{aligned} \Delta F_s &= \Delta F_{s1} + \Delta F_{s2} = \frac{1}{2} \Delta h_1 + \frac{1}{2} \Delta h_2 \\ &= \frac{1}{2} e [\sin \varphi - \sin(-2\beta + \varphi)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{令 } \frac{d(\Delta F_s)}{d\varphi} = 0$$

得到 $\Delta F_s$ 的极值点

$$\varphi_m = \beta \quad (7)$$

$\Delta F_s$ 的极值为

$$(\Delta F_s)_m = e \sin \beta \quad (8)$$

而实际齿圈径向跳动为

$$\Delta F_s = 2(\Delta F_s)_m = 2e \sin \beta \quad (9)$$

当 $\beta = 0^\circ$ 时,

$$(\Delta F_s)_{m,0} = 0 \quad (10)$$

当 $\beta = 90^\circ$ 时,

$$(\Delta F_s)_{m,90} = 2e \quad (11)$$

从式(6)可以看出, $\Delta F_s$ 是按正弦规律变化的,数值由式(9)确定。

从式(9)可以看出, $\Delta F_s$ 的数值受 $\beta$ 角的影响很大, $\Delta F_s = 0 \sim 2e$ 。这里显示了与双面展成法加工齿轮的区别,当 $e$ 值相同时,单面展成磨齿法产生的 $\Delta F_s$ 常常小于前者。

(二) 由机床分度系统总角误差引起的齿圈径向跳动  $\Delta F_z$

这一部分理论分析和推导公式的前题是机床分度系统的总角误差  $\Delta\gamma_z$  基本上呈正弦规律变化, 即  $\Delta\gamma_z$  可用一个等效正弦来代替。

如果用机床分度系统的总运动偏心  $E$  来代替等效正弦, 它使齿坯产生的运动偏心应为

$$e_s = \frac{r}{R} E = \frac{r}{2R} \Delta F_z = 2.424 \times 10^{-6} r \Delta\gamma_z \quad (12)$$

同前一节讨论问题的办法一样, 把  $M_2$  的安装面翻转到  $M_1$  的安装面上来, 见图 3。  
 $\vec{e}_{s1}$  和  $\vec{e}_{s2}$  分别是磨削  $M_1$  和  $M_2$  时的运动偏心。极坐标轴  $ox'$  选在与  $\vec{e}_{s1}$  成  $180^\circ$  的方向上, 令  $\vec{e}_{s1}$  和  $\vec{e}_{s2}$  与翻转轴  $NN$  的夹角相等, 且

$$e_{s1} = e_{s2} = e_s \quad (13)$$

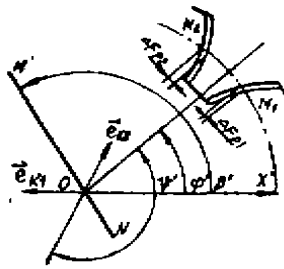


图 3  $\Delta\gamma_z$  引起的两侧齿廓  $\Delta F_z$

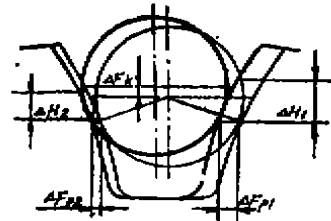


图 4  $\Delta F_{z1}$  和  $\Delta F_{z2}$  引起的  $\Delta F_z$

由  $\vec{e}_{s1}$  与  $\vec{e}_{s2}$  引起  $M_1$  与  $M_2$  上的周节累积误差分别为

$$\Delta F_{z1} = e_{s1} \sin \varphi' = e_s \sin \varphi' \quad (14)$$

$$\Delta F_{z2} = e_{s2} \sin \psi' = e_s \sin(-2\beta' + \varphi') \quad (15)$$

由  $\Delta F_{z1}$  和  $\Delta F_{z2}$  引起的齿廓径向位移见图 4。在  $M_1$  和  $M_2$  上的径向位移分别为

$$\Delta H_1 = \text{ctg } \alpha \Delta F_{z1} \quad (16)$$

因为  $\Delta H_2$  与  $\Delta F_{z2}$  的符号总是相反的, 所以

$$\Delta H_2 = -\text{ctg } \alpha \Delta F_{z2} \quad (17)$$

齿轮的任一齿槽所产生的齿圈径向跳动应为

$$\begin{aligned} \Delta F_z &= \Delta F_{z1} + \Delta F_{z2} = \frac{1}{2} \Delta H_1 + \frac{1}{2} \Delta H_2 \\ &= \frac{1}{2} e_s \text{ctg } \alpha [\sin \varphi' - \sin(-2\beta' + \varphi')] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{令 } \frac{d(\Delta F_z)}{d\varphi'} = 0$$

得到  $\Delta F_z$  的极值点

$$\varphi_n' = \beta' \quad (19)$$

$\Delta F_z$  的极值为

$$(\Delta F_z)_n = e_s \text{ctg } \alpha \sin \beta' \quad (20)$$

而实际齿圈径向跳动为



在讨论问题之前, 必须再次指出: 只有  $\Delta r_s$  近于正弦变化规律, 才能应用解析法确定  $\beta^2$  角。

(一) 求  $\Delta F_r = F(\varphi_1)$  的极值点与极值

对式 (26) 微分, 并令

$$\frac{d(\Delta F_r)}{d\varphi_1} = 0$$

得  $\varphi_1 = \beta$

将  $\varphi_1 = \beta$  代入式 (26), 得到  $\Delta F_r$  的极大值和极小值的绝对值为

$$(\Delta F_r)_{\max} = 2|k \sin \beta + c \cos(\theta - \beta)| \quad (27)$$

而实际齿圈径向跳动应为

$$\Delta F_r = 4|k \sin \beta + c \cos(\theta - \beta)| \quad (28)$$

(二) 求  $\Delta F_r = f(\theta, \beta)$  的极值点与极值

对式 (28) 偏微分, 并令

$$\frac{\partial(\Delta F_r)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial(\Delta F_r)}{\partial\beta} = 0$$

可求得驻点  $\theta = 90^\circ$ 、 $\beta = 90^\circ$ 。又根据

$$\left[ \frac{\partial^2(\Delta F_r)}{\partial\theta \partial\beta} \right]_0^2 - \left[ \frac{\partial^2(\Delta F_r)}{\partial\theta^2} \right]_0 \left[ \frac{\partial^2(\Delta F_r)}{\partial\beta^2} \right]_0 < 0$$

$$\text{和} \quad \left[ \frac{\partial^2(\Delta F_r)}{\partial\theta^2} \right]_0 < 0 \quad \left[ \frac{\partial^2(\Delta F_r)}{\partial\beta^2} \right]_0 < 0$$

说明  $\theta = 90^\circ$ 、 $\beta = 90^\circ$  时,  $\Delta F_r$  有极大值。

以下将讨论  $\theta$  在任意值条件下, 函数  $\Delta F_r = f(\theta, \beta)$  的极值点  $\beta_1$  与极值:

对式 (28) 微分, 并令

$$\frac{d(\Delta F_r)}{d\beta} = 0$$

$$\text{得} \quad \beta_1 = \arctg \left( \frac{k}{c} + \sin \theta \right) / \cos \theta \quad (29)$$

由式 (26) 求得:

$$\frac{d^2(\Delta F_r)}{d\varphi_1^2} = -2[k \sin \beta + c \cos(\theta - \beta)] \quad (30)$$

式 (29) 代入式 (30), 当  $0^\circ \leq \beta_1 \leq 180^\circ$  时,

$$\text{得} \quad \left[ \frac{d^2(\Delta F_r)}{d\varphi_1^2} \right]_{\beta_1} < 0$$

说明此时式 (29) 为极大值点。按式 (28) 可求得  $\Delta F_r$  的极大值为

$$(\Delta F_r)_{\max} = 4|k \sin \beta_1 + c \cos(\theta - \beta_1)| \quad (31)$$

经推算

$$(\Delta F_r)_{\max} = 4(k \pm c) \quad (31a)$$

(三) 求  $\Delta F_r = 0$  时的最有利的  $\beta_2$  角

前面已经证明了  $\beta_1$  为极大值点。由此推理,  $\beta_1 + 180^\circ$  应有极小值点,  $\beta_1 \pm 90^\circ$  应有零值点。用  $\beta_2 = \beta_1 - 90^\circ$  代入式 (28), 得

$$(\Delta F_r)_{\min} = 4 |k \sin \beta_2 + c \cos(\theta - \beta_2)|$$

经推导  $(\Delta F_r)_{\min} = 0$

(32)

由式 (32) 证明了  $\beta_2$  却实是零值点。从而说明  $\beta_2$  是最有利的翻转角  $\beta$ 。

在已知  $\widehat{e}$ 、 $\widehat{e}_2$ 、 $\alpha$  和  $\theta$  的条件下, 可以按式 (33) 计算出磨削第二侧齿廓时最有利的翻转角  $\beta_2$ 。这样, 可以最大限度地减小  $\Delta F_r$  的数值。在理论上, 齿轮齿圈径向跳动可以小到零, 而实际上是不可能的, 因为  $\Delta \gamma_r$  不可能是纯正弦规律, 以及加工中还存在偶然误差。

$$\beta_2 = \arctg \frac{\frac{k}{c} + \sin \theta}{\cos \theta} - 90^\circ$$

$$= \arctg \frac{\frac{e_2}{e} \operatorname{ctg} \alpha + \sin \theta}{\cos \theta} - 90^\circ$$

(33)

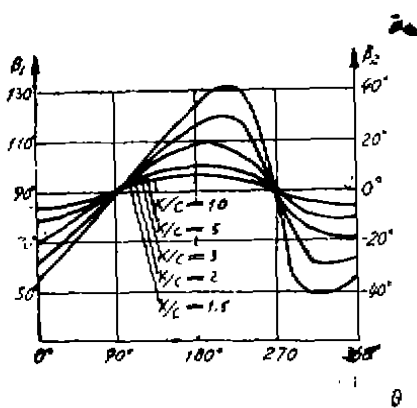


图6 最不利和最有利的  $\beta$

由于篇幅所限, 不再赘述。

为了实用方便, 按式 (29) 和 (33) 画出图 6  $\theta$ - $\beta$  曲线。根据  $e_2$ 、 $e$  和  $\alpha$  值计算  $k/c$  的值, 并考虑  $\widehat{e}$  对  $\widehat{e}_2$  的导前角  $\theta$ , 按曲线簇即可查出最有利的齿坯翻转角  $\beta_2$ , 使  $\Delta F_r$  减小到最低限度。

除了解析选位法之外, 还可以采用图解选位法。它不管  $\Delta \gamma_r$  是不是正弦规律都可以应用。将各种误差来源均以曲线的方式画在极坐标或直角坐标系中, 合成为  $\Delta F_{r1}$  与  $\Delta F_{r2}$  后, 观察它们在哪一个  $\beta$  角下相加起来的  $\Delta F_r$  为最小, 此时的翻转角  $\beta$  即为最有利的翻转角。由于

## 五、减少齿圈径向跳动的实验选位法

解析选位法和图解选位法, 均须在机床分度系统的误差经过准确测量、磨齿心轴与齿坯的安装误差有可靠记录的前提下才能应用。对于科学实验来说, 能够满足上述条件, 而对于工厂生产, 就很难满足上述条件。

实验表明: 当齿坯孔与磨齿心轴配合间隙较小的条件下, 可以用实验方法找出较为有利的  $\beta$  角, 达到减小  $\Delta F_r$  的目的。这种方法就是选一、二件孔与心轴配合间隙较小的齿坯, 分别选  $\beta = 0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $135^\circ$  四种翻转角进行四次磨齿实验 (每次实验, 都必须在磨削火花达到十分均匀并近于消失的情况下, 才能停磨), 准确测量每次磨齿后的  $\Delta F_r$ , 并将四次误差值加以比较, 选择其中最小的  $\Delta F_r$  采用的  $\beta$  角作为成批生产时的  $\beta$  角即可。

为了保证被加工齿轮在成批生产中齿圈径向跳动都合格, 实验中最小的  $\Delta F_r$  值应满足下式:

$$\Delta F_r \leq F_r - T \quad (34)$$

式中.  $F_r$ ——齿轮齿圈径向跳动的公差,

$T$ ——磨齿不重复性因子。对于JB179—83 齿轮精度标准中 2~4 级精度的标准齿轮, 可选  $T = (1.5 \sim 4) \mu\text{m}$ 。

在小批生产条件下, 采用实验选位法磨削齿轮误差的平均值列于表 2。只要与表 1 对照一下, 就可看出选位安装齿坯时的磨齿效果。在表 2 中的各种齿轮,  $\overline{\Delta F_r}$  均小于  $\overline{\Delta F_r}_0$ 。

表 2 用实验选位法控制的  $\Delta F_r$

$m$	0.5	1	1.5	1.75	3
$z$	108	115	68	60	51
$\overline{\Delta F_r}$	0.0027	0.0015	0.005	0.0031	0.005
$\overline{\Delta F_r}_0$	0.0031	0.005	0.006	0.0034	0.006

#### 参 考 文 献

- 〔1〕王立鼎, 磨床与磨削, 1981.3期

### Study on the Causes for Diameter Runout of Pitch Circle in Gear-grinding by Single-side Generating Method

Wang Liding

#### Abstract

In this paper the particularity of the causes for diameter runout of pitch circle in gear-grinding with single-side generating method is expounded. The error sources and error compounding method are analyzed. The approach to setup gear blank and decrease the diameter runout of pitch circle by analytically selecting location and experimentally selecting location is presented either.