

采用法布里—珀罗干涉仪测量激光 线宽的卷积分析

张铁军 陈 方 朱文煜

摘要: 本文讨论一个基本的光学问题。采用法布里—珀罗干涉仪透射函数的卷积方程详细分析了法布里—珀罗干涉仪在入射激光存在一定线宽的条件下透射函数的特性。由于仪器函数的自身线宽及其周期性的加宽作用结果,导致透射函数的半峰值线宽受到加宽,可见度下降。因而采用透射函数的半峰值线宽测量入射激光线宽的方法是不严格的,仅在一定的条件下才适用。本文给出了采用透射函数的半峰值线宽测量入射激光线宽的方法所应满足的约束条件

关键词: 法布里—珀罗干涉仪; 透射函数

一、引言

法布里—珀罗干涉仪的仪器函数与入射激光的线型函数之间的相互关系是一个基本的光学问题,通常是将入射激光的线宽视为极窄的极限情况进行分析^[1]。而实际的入射激光都具有一定的线宽,既可以是单一中心频率分布,也可以是多个中心频率分布,对此类实际情形的分析目前尚不完善^[2],而此类问题恰是使用法布里—珀罗干涉仪进行激光线宽测量的理论基础。

本文试图从表征法布里—珀罗干涉仪透射函数的卷积方程出发,讨论入射激光具有一定线宽的情况下,透射函数所应具有的特性,同时对已有的采用法布里—珀罗干涉仪透射函数的半峰值线宽测量激光线宽的方法^[3]作出原理上的评价,并给出了采用该方法应该满足的约束条件。

二、卷积方程及其定性分析

对于光强为 I_0 ,频率为 ν 的单色激光入射到法布里—珀罗干涉仪上,其透射函数 I_{\dots} 满足:

$$I_{\dots} = I_0 A \left\{ 1 + \left(\frac{2\Delta\nu_{FSR}}{\pi\Delta\nu_F} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_{FSR}} \right) \right\}^{-1} \quad (1)$$

(1) 式中各个参量的物理意义及其表达式见表1。

表1 透射函数 I_{\dots} 各参量的物理意义及其表达式

	自由光谱范围	仪器线宽	精细常数	A	共振频率
	$\Delta\nu_{FSR}$	$\Delta\nu_F$	$\Delta\nu_{FSR}/\Delta\nu_F$		ν_0
共焦型	$C/4nr$	$C(1-R^2)/4\pi nrR$	$\pi R/(1-R^2)$	$T^2/(1-R^2)^2$	$m\Delta\nu_{FSR}$
平面型	$C/2nd$	$C(1-R)/2\pi nd\sqrt{R}$	$\pi\sqrt{R}/(1-R)$	1	$m\Delta\nu_{FSR}$

表中： n ：反射镜之间介质的折射率； R ：反射镜的反射率；
 r ：反射镜的曲率半径； d ：平面反射镜之间的间距；
 m ：正整数

对于中心频率为 ν_0' ，光强为 $I_0(\nu_0')$ ，线宽为 $\Delta\nu$ 的入射激光，经过法布里——珀罗干涉仪后，透射函数 I_{\dots} 满足：

$$I_{\dots}(\nu_0', \nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 A \left\{ 1 + \left(\frac{2\Delta\nu_{FSR}}{\pi\Delta\nu_F} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi(\nu - \nu_0)}{4\nu_{FSR}} \right) \right\}^{-1} g(\nu, \nu_0') d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu_0, \nu) g(\nu, \nu_0') d\nu$$

即 $I_{\dots}(\nu_0', \nu_0) = I_i(\nu_0) * g(\nu_0')$ (2)

(2) 式就是法布里——珀罗干涉仪透射函数的卷积方程是本文分析的基础，其中 $I_i(\nu_0, \nu) = I_0 A \left\{ 1 + \left(\frac{2\Delta\nu_{FSR}}{\pi\Delta\nu_F} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_{FSR}} \right) \right\}^{-1}$ 。 $g(\nu, \nu_0')$ 为入射激光的线型函数，其具体形式见表 2。

表2 线型函数的不同分布形式

分布形式	线型函数的表达式
Lorentz 分布	$g_L(\nu, \nu_0') = \frac{\Delta\nu_L}{2\pi} \left[\left(\frac{\Delta\nu_L}{2} \right)^2 + (\nu - \nu_0')^2 \right]^{-1}$
Gauss 分布	$g_G(\nu, \nu_0') = \frac{2}{\Delta\nu_D} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0'}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right]$
综合加宽分布	$g_H(\nu, \nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_L(\nu_0, \nu_0'') g_D(\nu, \nu_0'') d\nu_0''$

当入射激光线宽 $\Delta\nu_L(\Delta\nu_D) \ll \Delta\nu_F$ 时， I_{\dots} 反映的主要是仪器函数；而当入射激光线宽 $\Delta\nu_L(\Delta\nu_D) \gg \Delta\nu_F$ 时， I_{\dots} 反映的主要是入射激光的线型函数。由 (2) 式给出的卷积方程一般不存在显函形式的表达式，但至少可以有如下两点解析分析：

1. 当已知透射函数 I_{\dots} 及仪器函数 I_i 或线型函数 g 之一时，可用Fourier变换求出另外一个函数的理论解。比如，已知 $I_{\dots}(\nu_0', \nu_0)$ ， $I_i(\nu_0)$ ，则线型函数 $g(\nu_0')$ 满足以下关系式：

$$g(\nu_0') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[I_{\dots}(\nu_0', \Omega)] \{F[I_i(\Omega)]\}^{-1} \exp(i\Omega\nu_0') d\Omega \quad (3)$$

其中 $F[I_{\dots}(\nu_0', \Omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\dots}(\nu_0', \nu_0) \exp(-i\Omega\nu_0) d\nu_0$

$$F[I_i(\Omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} I_i(\nu_0) \exp(-i\Omega\nu_0) d\nu_0$$

2. 如果线型函数具有极窄的半值线宽, 那么仪器函数可近似展为 Lorentz 形式^[2], 由卷积方程可得:

$$I_{\dots}(\nu_0', \nu_0) \approx I_0 A \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 + \left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_F} \right]^2 \right\}^{-1} g(\nu, \nu_0') d\nu \quad (4)$$

(4) 式视 $g(\nu, \nu_0')$ 的不同形式而不同: 当 $g(\nu, \nu_0')$ 为 Lorentz 分布时, I_{\dots} 也具有 Lorentz 分布的形式, I_{\dots} 的半峰值线宽为 $\Delta\nu_F + \Delta\nu_L$; 当 $g(\nu, \nu_0')$ 为 Gauss 分布时, I_{\dots} 具有福克脱函数分布的形式, 设有解析显函形式。

由卷积运算的特性, 仪器函数 $I_i(\nu_0)$ 与线型函数 $g(\nu_0')$ 卷积结果就是其中一个函数使另一个函数受到平滑并且得到加宽。由于在实际的入射激光线宽内不同频率成份经过法布里——珀罗干涉仪后的透射强度的迭加, 导致实际的透射函数 I_{\dots} 上的每一点都不是由单一频率成份组成。法布里——珀罗干涉仪的仪器函数 $I_i(\nu_0)$ 的作用就是使集中于入射激光线宽内的能量重新分布, 但是总能量不变, 直接的结果就是透射函数 I_{\dots} 的半峰值宽度总是大于线型函数的半峰值宽度。进一步而言, I_{\dots} 的极大值总是小于 I_i 的极大值, 而 I_{\dots} 的极小值又总是大于 I_i 的极小值, 可见度下降, 这也正是能量重新分布的结果。还应注意, 仪器函数为频率的周期函数, 这种周期性也会导致入射激光能量的重新分布。由此定性分析可知, 由透射函数的半峰值宽度测量入射激光的线宽在理论上来说是不严格的, 它只是一种近似方法。

三、数值计算结果及分析

假设 ν_a 、 ν_b 分别为计算时所用入射激光的最低频率和最高频率, $\Delta\nu_0$ 为计算时所用的频率间隔, 线型函数 $g(\nu, \nu_0')$ 可以用数值计算形式 $g(\nu, \nu_0')$ 代替:

$$g(\nu, \nu_0') = \begin{cases} 0 & (\nu < \nu_a \text{ 或 } \nu > \nu_b) \\ g(\nu, \nu_0') & (\nu_a \leq \nu \leq \nu_b) \end{cases}$$

于是卷积积分方程可以用卷积求和方程代替:

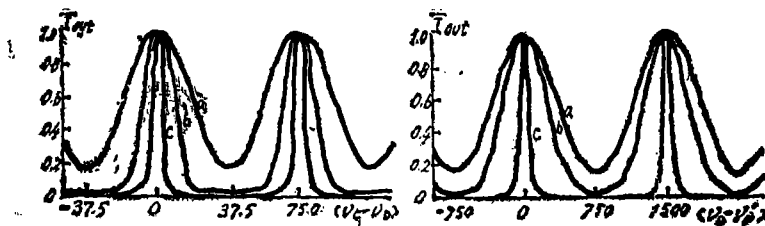
$$I_{\dots}(\nu_0, \nu_0') \approx \sum_{i=0}^N g(\nu, \nu_0') \left\{ 1 + \left(\frac{2\Delta\nu_{FSR}}{\pi\Delta\nu_F} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\pi(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_{FSR}} \right] \right\}^{-1} \Delta\nu_0 \quad (5)$$

其中 $\nu = \nu_a + (i + \frac{1}{2})\nu_0$, $N = \text{Int} \left(\frac{\nu_b - \nu_a}{\Delta\nu_0} \right)$, Int 表示取整。为了提高计算精度, 减小由

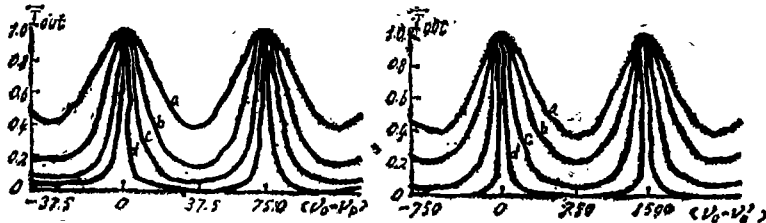
$g(\nu, \nu_0')$ 截断以及连续函数离散化而带来的误差, N 应取愈大愈好, 亦即应提高 $\nu_b - \nu_a$ 及减小 $\Delta\nu_0$, 但 N 的选取只要能够保证计算精度即可, 以尽量加快运算速度。

1. 单一中心频率分布

图1给出了单一中心频率分布情形的计算结果曲线, $\bar{I}_{\dots} = I_{\dots} / I_{\dots, \max}$ 即幅值是对透射函数最大值 $I_{\dots, \max}$ 规一化的, 图1(a, b)为 Gauss 分布情形, (c, d) 为 Lorentz 分布情形, 在(a, c)中 $\Delta\nu_{FSR} = 75 \text{ G Hz}$, $\Delta\nu_F = 2 \text{ G Hz}$, 在(b, d)中 $\Delta\nu_{FSR} = 1500 \text{ M Hz}$, $\Delta\nu_F = 20 \text{ MHz}$ 。不论是 Lorentz 分布的线型函数还是 Gauss 分布的线型函数, 随着入射激光线宽的增加, 透射函数的半峰值宽度也增加, 同时透射函数的可见度降低, 当可见度小于 1/3 时, 透射函数 I_{\dots} 已不存在半峰值宽度。对于 Lorentz 分布的线型函数, 透射函数的半峰值宽度 $\Delta\nu_{\dots} \geq \Delta\nu_L + \Delta\nu_F$, 且 $\Delta\nu_L$ 愈大, $\Delta\nu_{\dots}$ 与 $\Delta\nu_L + \Delta\nu_F$ 的差别也愈大。而对 Gauss 分布的线型函数, $\Delta\nu_{\dots}$ 满足



(a) a - $\Delta\nu_D = 37.5\text{GHz}$; b - $\Delta\nu_D = 10\text{GHz}$; c - $\Delta\nu_D = 2\text{GHz}$ (b) a - $\Delta\nu_D = 750\text{MHz}$; b - $\Delta\nu_D = 500\text{MHz}$; c - $\Delta\nu_D = 20\text{MHz}$



(c) a - $\Delta\nu_D = 37.5\text{GHz}$; b - $\Delta\nu_D = 20\text{GHz}$; c - $\Delta\nu_D = 10\text{GHz}$; d - $\Delta\nu_D = 2\text{GHz}$ (d) a - $\Delta\nu_D = 750\text{MHz}$; b - $\Delta\nu_D = 500\text{MHz}$; c - $\Delta\nu_D = 200\text{MHz}$; d - $\Delta\nu_D = 20\text{MHz}$

图 1 透射函数 I_{out} 同入射激光中心频率与法布里—珀罗干涉仪共振频率之差 $\nu_0 - \nu_0'$ 的关系曲线

$\Delta\nu_D < \Delta\nu_{out} \leq \sqrt{\Delta\nu_D^2 + \Delta\nu_F^2}$, 并且 $\Delta\nu_{out}$ 更为接近 $\sqrt{\Delta\nu_D^2 + \Delta\nu_F^2}$ 。因此, 不论何种线型函数, 由于法布里—珀罗干涉仪仪器函数自身的线宽及其频率周期性的加宽作用结果, 使得透射函数 I_{out} 与频率之间的关系比较复杂, 直接由透射函数的半峰值宽度实际上并不能真正获得入射激光线宽的准确信息。文献^[3]中谈及的扫描干涉仪测量激光线宽的方法在原理上是不严格的。

数值计算表明仪器函数近似展开为 Lorentz 分布^[4], 由于忽略了仪器的周期性因而存在一定的误差。对于 Lorentz 分布的线型函数, 实际的透射函数同将仪器函数展为 Lorentz 分布的近似计算结果差别很大, 尤其是当入射激光线宽可以同法布里—珀罗干涉仪的自由光谱范围相比拟时, 透射函数的半峰值线宽明显大于入射激光线宽与仪器函数线宽之和。但对 Gauss 分布的线型函数, 采用这种近似得到的透射函数的半峰值宽度同非近似的结果差别在很大范围内并不是很大的。图 3 给出了采用 Lorentz 近似与无此近似情况下的关系曲线, 图 (a) 为 Lorentz 线型函数情形, 图 (b) 为 Gauss 线型函数情形, 图 (a, b) 图中 a 为数值结果, 图中 b 为仪器函数取 Lorentz 近似的结果, 其余参数同图 1 中 (a, c)。

2. 多个中心频率分布

对于多个中心频率分布的情形, 线型函数可以用下式表示:

$$g(\nu, \nu_1', \nu_2', \dots, \nu_k') = \sum_{i=1}^k g_i g_0(\nu, \nu_i')$$

其中 g_i 为振子强度, 而 $g_0(\nu, \nu_i')$ 为单一中心频率的线型函数, 它满足:

$$g_0(\nu, \nu_i') = \begin{cases} \frac{\Delta\nu_{Li}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{\Delta\nu_{Li}}{2} \right)^2 + [\nu - \nu_0' - (i-1)\Delta\nu_s]^2 \right\}^{-1} & (\text{对 Lorentz 分布}) \\ \frac{2}{\Delta\nu_D} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-4 \ln 2 \times \left(\frac{\nu - \nu_0' - (i-1)\Delta\nu_s}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right] & (\text{对 Gauss 分布}) \quad (i=1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

其中 $\nu_i' = \nu_0' - (i-1)\Delta\nu_s$, $\Delta\nu_s$ 为中心频率之间的间距。于是卷积方程 (2) 可以变为:

$$I_{out} = I_0 A \sum_{i=1}^K g_i I_i(\nu_0) * g_0(\nu_i') \quad (6)$$

即透射函数为每一中心频率的线型函数与仪器函数的卷积之和，图3给出了多个中心频率情形的计算结果曲线， $\Delta\nu_c = 200\text{MHz}$ ，线型函数均为 Lorentz 分布情形，此外 $\Delta\nu_{FSR} = 1500\text{MHz}$ ， $\Delta\nu_F = 20\text{MHz}$ ， $\Delta\nu_L = 20\text{MHz}$ 。由于不同中心频率的卷积迭加结果使得透射函数又具有多模加宽。

3. 透射函数的可见度

可见度 $C = (I_{out\ max} - I_{out\ min}) / (I_{out\ max} + I_{out\ min})$ ，图4中给出了 Lorentz 分布与 Gauss

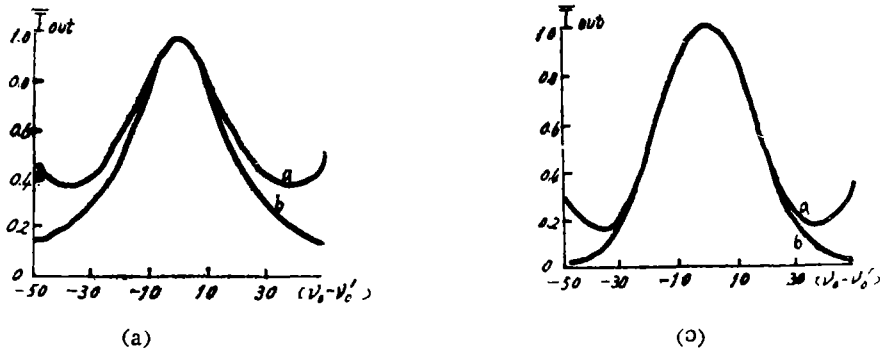
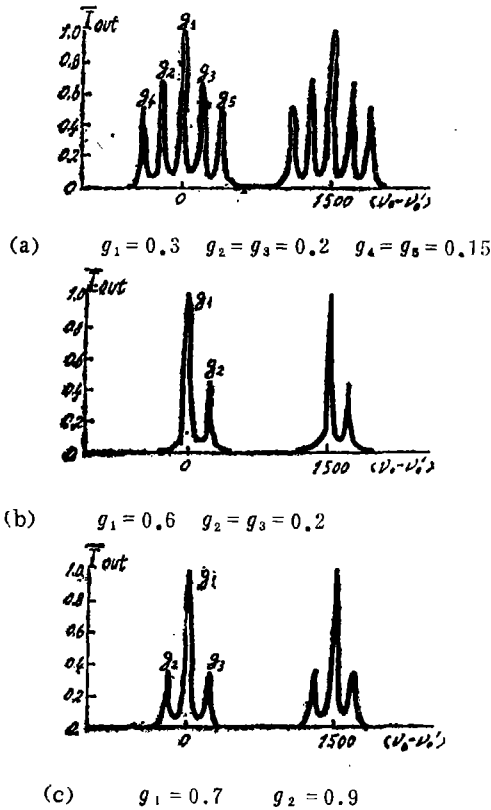
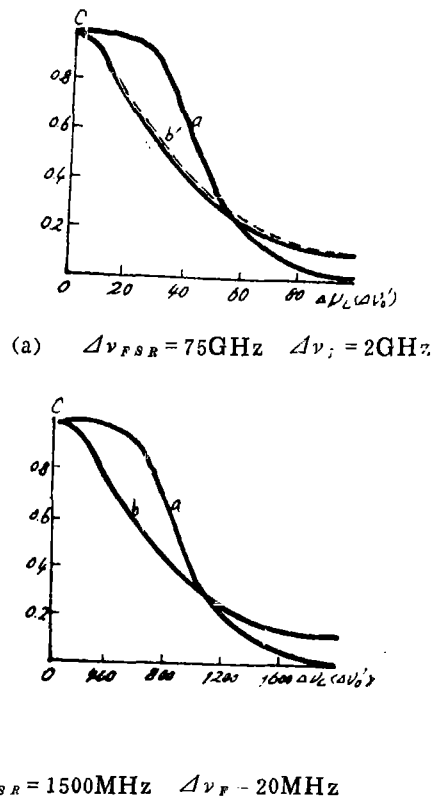


图2 透射函数数值计算结果与 Lorentz 近似结果的比较曲线



(a) 五个模；(b) 三个模；(c) 二个模
图3. 多个中心频率分布情形的计算结果曲线



(a) $\Delta\nu_{FSR} = 1500\text{MHz}$ $\Delta\nu_F = 20\text{MHz}$
a. Gauss 线型函数 (b) Lorentz 线型函数
图4. 可见度 C 与入射激光线宽的关系

分布两种情况下可见度 C 与入射激光线宽之间的关系曲线。其中 (a, b) 分别对应两种不同结构的干涉仪。由曲线可知, 不论是 Lorentz 分布还是 Gauss 分布, 每一种特定的线型函数都具有相应固定的可见度分布规律, 图 4 中的 (a, b) 两种不同的法布里——珀罗干涉仪对应着相同的分布规律。

在可见度与入射激光线宽的关系曲线上, 存在一个近似线性区域, 该区域中可见度随激光线宽呈近似线性变化, 灵敏度最高。线性区域的上限和下限分别反映了法布里——珀罗干涉仪所能进行激光线宽测量的灵敏区域, 而线性区域之外, 法布里——珀罗干涉仪对入射激光线宽的变化不敏感, 不利于进行线宽的测量。所以, 从可见度曲线能够确定不同法布里——珀罗干涉仪测量激光线宽的范围。

对 Lorentz 分布的线型函数, 其可见度曲线非常接近一种 Lorentz 分布规律, 可以用以下的经验公式表示:

$$C = \left\{ \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\Delta\nu_F}{\Delta\nu_{FSR}} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_{FSR}/2 - \Delta\nu_F} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$$

亦即:

$$\Delta\nu_L = \left(\frac{\Delta\nu_{FSR}}{2} - \Delta\nu_F \right) \sqrt{\frac{1}{C \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\Delta\nu_F}{\Delta\nu_{FSR}} \right)^2 \right]^{-1}}} \quad (7)$$

图 4 (a) 中上的虚线曲线 b' 就是由该近似公式计算得到的, 这一经验解析近似与数值计算所得到的结果相吻合。但对于 Gauss 分布的线型函数还不能发现相应的经验解析公式。

四、约束条件

按照以上的分析, 采用法布里——珀罗干涉仪透射函数的半峰值线宽测量入射激光的线宽仅仅是一种粗略的近似方法。入射激光的线宽 $\Delta\nu_L$ ($\Delta\nu_D$)、透射函数的半峰值线宽 $\Delta\nu_{out}$ 和仪器线宽 $\Delta\nu_F$ 可以用下列关系近似表示:

$$\Delta\nu_L \approx \Delta\nu_{out} - \Delta\nu_F \quad (\text{Lorentz 分布}) \quad (8)$$

$$\Delta\nu_D \approx \sqrt{\Delta\nu_{out}^2 - \Delta\nu_F^2} \quad (\text{Gauss 分布}) \quad (9)$$

但式 (8)、(9) 成立是有条件的。当入射激光的线宽 $\Delta\nu_L$ 远远小于或大于仪器线宽 $\Delta\nu_F$ 时, 都将破坏 (8)、(9) 两式的正确性。因此, 有必要建立采用法布里——珀罗干涉仪透射函数的半峰值线宽测量入射激光线宽的约束条件, 或者说使 (8)、(9) 两式能近似成立的条件, 从而使由这种方法测得的激光线宽能够准确地反映其真值。

1. 对于法布里——珀罗干涉仪的透射函数而言, 当其极大值 $I_{out, max}$ 为极小值 $I_{out, min}$ 之两倍时, 已经不能反映出透射函数的半峰值线宽, 半峰值线宽已被低的可见度所掩盖了。因此, 为能够由透射函数的半峰值线宽测量出入射激光的线宽至少应满足:

$$I_{out, max}/I_{out, min} > 2 \quad (10)$$

2. 当入射激光的线宽可与法布里——珀罗干涉仪的仪器线宽相比拟时将会对入射激光线宽有掩盖作用。按照瑞利判据, 当满足 $I_{out, max}/I_{out, min} \geq \frac{8}{\pi^2}$ 时, 法布里——珀罗干涉仪仍

然能够分辨出两个极大峰值, 相应地看最小可见度 $C_{min} = \frac{\pi^2 - 8}{\pi^2 + 8}$, 因而按照瑞利判据能够分

辨的最大可见度 $C_{max} = 1 - C_{min} = \frac{16}{\pi^2 + 8}$ 。据此应有下列条件成立:

$$I_{out\ max}/I_{out\ min} \leq \frac{\pi^2 + 24}{\pi^2 - 8} \quad (11)$$

3. 不论是Lorentz分布还是 Gauss 分布, 在可见度与入射激光线宽的关系曲线上存在一个近似线性区域, 亦即 $C_{min\ 0} \leq C \leq C_{max\ 0}$, $C_{min\ 0}$ 与 $C_{max\ 0}$ 分别为线性区域的下限和上限, 相应地有:

$$\frac{1 + C_{min\ 0}}{1 - C_{min\ 0}} \leq I_{out\ max}/I_{out\ min} \leq \frac{1 + C_{max\ 0}}{1 - C_{max\ 0}} \quad (12)$$

在这一区域内, 透射函数的半峰值线宽对于待测激光的线宽最为灵敏, 因而有利于激光线宽的测量。由图 4 (a, b) 两种计算结果可知, 可见度为线性变化的范围为: $0.5 \leq C \leq 0.9$, 相应地看:

$$3 \leq I_{out\ max}/I_{out\ min} \leq 19 \quad (13)$$

综合以上的分析, 为了能够较为准确的测量出激光的线宽, 透射函数的极值应该满足:

$$\pi \leq I_{out\ max}/I_{out\ min} \leq 6\pi \quad (14)$$

这就是采用法布里——珀罗干涉仪透射函数的半峰值线宽测量入射激光线宽所应满足的约束条件。透射函数的极值 $I_{out\ max}$ 、 $I_{out\ min}$ 均为实际中可测量的量, 因而这一判据具有较强的实用性, 并为较为准确地测量激光的线宽提供了依据。

五、结 论

传统的由法布里——珀罗干涉仪透射函数的半峰值线宽来确定入射激光的线宽是不严格的, 它只是一种粗略的估计方法。本文证明了采用这种测量方法必须满足必要的约束条件, 才能由半峰值线宽测得入射激光的线宽。透射函数的极值约束条件为使用这种方法准确地测量激光线宽提供了实用、方便的客观判据, 从而进一步完善了这种测量方法。

参 考 文 献

- [1] M. Born and E. Wolf, 《光学原理》, 科学出版社, 1978, § 7.6.2
- [2] 汤俊雄等, 应用激光, 1988, 8, No. 2, Apr., 55
- [3] 马祖光主编, 《激光实验方法》, 上海科学技术出版社, 1987, § 8—4

Convolution Analysis for Measuring Laser Linewidth with Fabry-Perot Interferometer

Zhang Tiejun Chen Fang Zhu Wenyu

Abstract

In this paper the transmission function properties of Fabry-Perot interferometer is analyzed by the convolution equation of transmission

function when linewidth of input laser is not equal to zero. The full width of transmission function at half maximum is broadened and the visibility is reduced because of the instrumental linewidth and the periodicity of transmission function. The method for measuring laser linewidth using the fullwidth of transmission function at maximum is not strict, it must satisfy some limiting conditions. The limiting conditions for measuring laser linewidth using the full width transmission function at maximum are given.

key words: Fabry-perot Interferometer, Transmission Function