

黑体空腔辐射理论的讨论

刘景生

(长春光机学院)

摘要: 本文对近黑体腔的辐射源理论进行了评论。重点评论了腔的积分方程理论、Gouffé, De Vos的腔辐射器的普遍理论以及它们的发展情况。说明了各种理论的一致性, 及其发展前景。

一、腔的积分方程理论

这种理论首先是由Buckley提出的^[1]。Buckley对一端封闭的等温漫射圆筒空腔(如图1所示)给出沿壁上各点发射率的分布为

$$\varepsilon_a(y_1) = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \int_0^L \varepsilon_a(y_2) k(y_1, y_2) dy_2 + (1 - \varepsilon) \varepsilon_a(\alpha_3) k'(y_1, \alpha_3) \quad (1)$$

而圆筒底面上的发射率为

$$\varepsilon_a(\alpha_3) = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \int_0^L \varepsilon_a(y_1) k_0'(\alpha_3, y_1) dy_1 \quad (2)$$

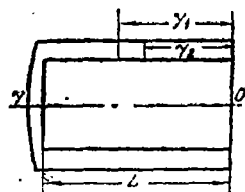


图1 圆筒腔的坐标的选取

式(1)表示: 圆筒内壁上距腔口 y_1 处的环壁上有效发射率 $\varepsilon_a(y_1)$ 等于 y_1 处圆环本身的表面发射率 ε 加上由筒壁上各点 (y_2) 和筒底上各点 (α_3) 对 y_1 处的发射率的贡献。式(2)表示: 筒底上 α_3 点的有效发射率 $\varepsilon_a(\alpha_3)$ 等于底面材料自身的发射率 ε 加上圆筒侧面对 α_3 处反射辐射的贡献。 $k(y_1, y_2)$ 、 $k'(y_1, \alpha_3)$ 和 $k_0'(\alpha_3, y_1)$ 分别表示: y_2 对 y_1 、 α_3 对 y_1 以及 y_1 对 α_3 的辐射交换角系数。

(1) 式和 (2) 式实质上是积分方程式, 为了求解, 必须给出核函数 $k(y_1, y_2)$ 、 $k'(y_1, \alpha_3)$ 和 $k_0'(\alpha_3, y_1)$ 。为了获得解析解, Buckley 用指数函数近似地表示了核函数:

$$\left. \begin{aligned} k(y_1, y_2) &\approx e^{-y/2} \\ k'(y_1, \alpha_3) &\approx e^{-y/2} \\ k_0'(\alpha_3, y_1) &\approx e^{-y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

解得圆筒底面的有效发射率为:

$$\varepsilon_a(\alpha_3) = 1 - \frac{4 \cdot \varepsilon^{1/2} \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \exp(\varepsilon^{1/2} \cdot l)}{[(1 - \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon^{1/2})^2] - [(1 - \varepsilon)^2 - (1 + \varepsilon^{1/2})^2] \cdot \exp(\varepsilon^{1/2} \cdot l)} \quad (4)$$

式中: $l = L/R$, R = 圆筒的内半径。

为得到(4)式我们曾假定: 角系数是按(3)式近似的, 并认为底面上的发射率分布是均匀的, 这两个假设给计算结果带来一定误差。对于 $\varepsilon = 0.5 \sim 0.7$ 的腔, Rossman 指出^[2], 当 $l = 1 \sim 4$ 之间时, Buckley 近似是好的, 精度在 $2 \sim 3\%$ 之内。James Vollmer 推广了

Buckley理论, 并把它应用到从圆筒轴上的观察点可以看到的圆筒壁上某一位置的情形^[3]。

Sparrow 应用精确角系数, 求得积分方程的数值解, 并解出圆筒和圆锥空腔内壁上的半球有效发射率的分布^{[4]-[6]}。他给出和Buckley完全相似的积分方程, 即沿圆筒空腔壁面的有效发射率为:

$$\varepsilon_a(x_0) = \varepsilon + (1-\varepsilon) \int_{x=0}^{L/d} \varepsilon_a(x') d^2F_{x_0'-x'} + (1-\varepsilon) \int_{r=0}^1 \varepsilon_a(r') d^2F_{x_0'-r'} \quad (5)$$

沿圆筒底面上的有效发射率为:

$$\varepsilon_a(r') = \varepsilon + (1-\varepsilon) \int_{x=0}^{L/d} \varepsilon_a(x') d^2F_{r'-x'} \quad (6)$$

式中: x ——从腔口算起, 沿圆筒轴的坐标; $x' = x/d$;

L ——圆筒的总长;

d ——圆筒腔内径;

R ——圆筒腔内半径;

r ——径向坐标; $r' = r/R$;

$d^2F_{x_0'-x'}$ —— x_0' 处单位面元对 x' 处微元圆环的角系数;

$d^2F_{x_0'-r'}$ —— x_0' 处单位面元对 r' 处微元圆环的角系数;

$d^2F_{r'-x'}$ —— r' 处微元圆环单位面积对 x' 处微元圆环的角系数。

Sparrow 导出了方程 (5) 和 (6) 的角系数

$$\left. \begin{aligned} d^2F_{x_0'-x'} &= \frac{1}{2R} \left\{ 1 - |x-x_0| \frac{(x-x_0)^2 + 6R^2}{[(x-x_0)^2 + 4R^2]^{3/2}} \right\} \cdot dx \\ d^2F_{r'-x'} &= 2(L-x) R^2 \frac{(L-x)^2 + R^2 - r^2}{\{[(L-x)^2 + r^2 - R^2]^2 - 4r^2R^2\}^{3/2}} dx \\ d^2F_{x_0'-r'} &= \frac{r dr}{R dx} \cdot d^2F_{r'-x_0'} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Sparrow 等人用迭代程序解了两个联立线性积分方程组, 并对典型圆筒空腔和圆锥空腔给出可用的结果和曲线。为了比较, 把 Buckley, Sparrow, Quinn, Gouffé 等理论对一端开口和材料发射率为0.75的漫反射壁的圆筒腔的有效发射率作为圆筒长与其半径比的关系曲线示于图 2^[7]。

R.E. Bedford 和 C.K. Ma^{[8]-[10]}发展了积分方程理论。其特点如下: 他们用区域近似法求解了积分方程式, 这种方法比使用 Newton-Cotes 型公式简单, 更精确; 他们指出了如何直接 (而没有外推的) 计算腔壁上各点有效发射率, 其中被积函数是单值的; 计算了与实际腔型—探测器形状相关的总体发射率; 首次讨论了非等温腔的光谱有效发射率。

仍以直圆筒腔为例, 因为有效发射率在腔内壁或底上的变化缓慢, 所以, 在分割后认为第 i 个圆环的有效发射率为: $\frac{1}{2}[\varepsilon_a(x_{i+1})$

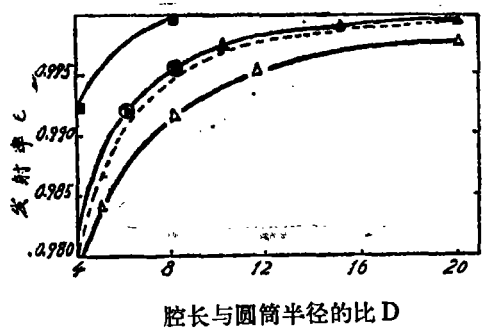


图 2 几种理论计算曲线的比较

■——Buckley, ▲——Quinn;
 ⊙——Sparrow △——Gouffé;
 ...——Sphere.

+ $\epsilon_a(x_i)$], 于是得到了带盖板的圆筒空腔的壁、底、盖上的有效发射率分别为

$$\begin{aligned} \epsilon_o(x_0) = & \epsilon_w + (1 - \epsilon_w) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(x_{i+1}) + \epsilon_o(x_i)] |dF_{x_0, x_{i+1}} - dF_{x_0, x_i}| \\ & + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=m}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(z_{j+1}) + \epsilon_o(z_j)] (dF_{x_0, z_{j+1}} - dF_{x_0, z_j}) \\ & + (1 - \epsilon_w) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(r_{k+1}) + \epsilon_o(r_k)] (dF_{x_0, r_{k+1}} - dF_{x_0, r_k}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_o(r) = & \epsilon_B + (1 - \epsilon_B) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(x_{i+1}) + \epsilon_o(x_i)] |dF_{r, x_{i+1}} - dF_{r, x_i}| \\ & + (1 - \epsilon_B) \sum_{j=m}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(z_{j+1}) + \epsilon_o(z_j)] (dF_{r, z_{j+1}} - dF_{r, z_j}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_o(z) = & \epsilon_L + (1 - \epsilon_L) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(x_{i+1}) + \epsilon_o(x_i)] (dF_{z, x_{i+1}} - dF_{z, x_i}) \\ & + (1 - \epsilon_L) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [\epsilon_o(r_{k+1}) + \epsilon_o(r_k)] (dF_{z, r_{k+1}} - dF_{z, r_k}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $dF_{x_0, x_i} = [(x_i - x_0)^2 + 1]^{1/2} - \{2[(x_i - x_0)^2 + 1]^{1/2}\}^{-1} \pm (x_0 - x_i)$
 $- (x_i < x_{i+1} < x_0)$

$$dF_{x_0, r_k} = -x_0 \left\{ 1 - \frac{4x_0^2 + r_k^2 + 1}{[(4x_0^2 + r_k^2 + 1)^2 - 4r_k^2]^{1/2}} \right\}$$

$$dF_{x_0, z_j} = dF_{L/D - x_0, r_k}$$

$$dF_{r, x_i} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{4x_i^2 + r^2 - 1}{[(4x_i^2 + r^2 + 1)^2 - 4r^2]^{1/2}} \right\}$$

$$dF_{r, z_j} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{4(L/D)^2 + r^2 - z_j^2}{[(4(L/D)^2 + r^2 + z_j^2)^2 - 4r^2 z_j^2]^{1/2}} \right\}$$

$$dF_{z, x_i} = dF_{r, L/D - x_i}$$

$$dF_{z, r_k} = dF_{r, z_j}$$

Bedford 和 Ma 解出的结果与 Sparrow 得到的结果相似, 他们运用 L.Hospital 法则求角系数在奇点的极限, 解决了奇点上的发射率的计算。目前认为是比较精确的方法, 而且是行之有效的。

我国褚载祥、陈守仁、陈宏磐等人在七十年代末至八十年代初也对较常用的各种腔型做了相应的计算^{[11]-[14]}。对黑体空腔辐射理论的发展做出贡献。我们也做了一些相应的计算^[15]。

R.J.Chandos 和 R.E.Chandos 也用解积分方程法计算了空腔内表面的有效发射率^[16]。

二、Gouffé 理论

Gouffé 推导出的公式为^[17]

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon \{1 + (1 - \epsilon) [(s/S) - (\omega/\pi)]\}}{\epsilon [1 - (s/S)] + (s/S)} \quad (11)$$

- 式中： ϵ_0 ——空腔的发射率；
 ϵ ——空腔内壁材料表面发射率；
 s/S ——空腔开口的面积；
 S ——空腔内表面积（包括开口的面积）；
 ω ——开口对腔底反射点的立体角。

其最主要的假设是认为经过两次反射后，腔内的辐射分布是均匀的。其最大的优点是运算简单意义明确、使用方便。计算值稍低于实际值（如图 2 所示）。Gouffé 理论可能是最著名和最广泛被引证的关于黑体模拟器腔型理论。但是，应该指出，对于开口很小的浅腔给出了好的结果，然而，不能用于长腔^{[19]-[20]}。因为 Gouffé 所用的 ω/π 是有误差的，应该用投影立体角代替立体角。对于大开口、离轴的后壁位置以及特别是对于具有倾斜后壁的腔其误差就更为严重了。

三、De Vos 理论与多次反射理论

De Vos 利用互惠原理，在普遍的非理想漫反射情况下，利用部分反射率的概念，给出了任意腔型的有效发射率的二级近似计算公式^[21]。

$$\epsilon_w'' = 1 - r_w^{00} d\Omega_w^0 - \iint_{2\pi - (d\omega)} r_w^{0n} r_n^{w0} d\Omega_n^0 d\Omega_w^0 - \delta\epsilon_w'' \quad (12)$$

- 式中： r_w^{00} 、 r_w^{0n} 、 r_n^{w0} ——部分反射率；
 $\delta\epsilon_w''$ ——由于温度不均匀所引起的修正因子。

其他符号意义如图 3 所示。

$$\text{而 } \delta\epsilon_w'' = \int_{2\pi - (d\omega)} C_n \epsilon_n r_w^{0n} d\Omega_n^0 + \iint_{2\pi - (d\omega)} C_m \epsilon_m r_n^{wm} r_w^{0n} d\Omega_n^m d\Omega_w^0 + \dots \quad (13)$$

$$\text{式中： } C_n = \frac{L_b(T_w) - L_b(T_n)}{L_b(T_w)}; \quad C_m = \frac{L_b(T_w) - L_b(T_m)}{L_b(T_w)}$$

由于 De Vos 理论讨论了普遍的情况，因此，被认为是较为完善和较有体系的理论。

有许多通过简化近似的计算有效反射率，进而计算发射率的精巧方法。除了前面提到的 Quinn 之外，还有 Treuenfels 和 Kelly 等人为代表的理论计算^{[22]-[26]}。所有这些就是通常所说的多次反射理论。Y. Ohwada 用数学归纳法证明了漫射腔任意级的有效发射率和同一级的吸收率是相等的^[26]。其基本思想是在腔内壁面上连续使用 Kirchhoff 定律，并且认为漫反射表面是由许多任意方向的镜反射面元组成的。

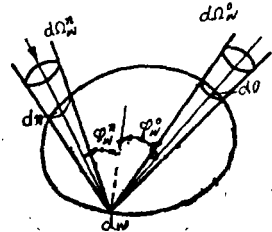


图 3 De Vos 理论的推导

四、各种腔发射理论的一致性

对于现有的空腔辐射理论已有若干评论^{[29]-[31]}，并且几种不同理论分析的结果具有相似性，其中包括上述的某些计算及其物理意义。

正如 Fecteau 指出：“…几种空腔发射理论之间的相似性已被检验，对于等温漫射球形腔的发射率，由 Gouffé, De Vos 以及 Sparrow 和 Jonsson 三种不同的近似，却都给出了完全相同形式的表达^[29]”。但是，他的 (6) 式是由 De Vos 理论推导出来的，其中 s 等于开口球冠的面积，而相应于 Gouffé 公式中的开口自身的面积 s_0 。而 F. E. Nicodemus 不用任何几何近似直接得到了理想漫反射灰体的等温球形腔的发射率的精确表达式，并得到了与 Fecteau 一致的结果^[30]。

Bartell 和 Wolfe 提出了腔辐射器的普遍理论^[31]。首先，考虑到多次反射给出了腔的发射率，它是作为一种嵌套 (Nested) 积分的无穷级数 (以辐射亮度为依据的发射率)

$$\begin{aligned} \varepsilon_L(\vec{r}, T_1) &= \frac{L(\vec{r})}{L^{bb}} = \varepsilon_{10} + \int_A \varepsilon_{21} f_{210}(T_2/T_1)^4 d\Omega_{21} \\ &+ \int_A f_{210} \int_A \varepsilon_{32} f_{321}(T_3/T_1)^4 d\Omega_{32} d\Omega_{21} + \dots \\ &+ \int_A f_{210} \dots \int_A \varepsilon_{n(n-1)} f_{n(n-1)(n-2)} \cdot (T_n/T_1)^4 d\Omega_{n(n-1)} \dots d\Omega_{21} \quad (14) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

- 式中：
 $L(\vec{r})$ —— 沿 \vec{r} 的辐射亮度；
 $L^{bb}(T_1)$ —— 在温度 T_1 时黑体的辐射亮度；
 $\varepsilon_{n(n-1)}$ —— 是由点 n 在 $(n-1)$ 点方向上的方向发射率；
 $f_{n(n-1)(n-2)}$ —— 从点 n 方向上到达 $(n-1)$ 点并在点 $(n-2)$ 方向上离开的双向反射率分布函数 (BRDF)^[34]；
 $d\Omega_{n(n-1)}$ —— 由 n 点处面元对 $(n-1)$ 点的投影主体角增量；
 \int_A —— 表示充满半球的积分。

在得到 (14) 式时，仅用的假设只是后壁上那个小面积 A_1 必定不能包含任何不连续点，如图 4 所示。(14) 式对于大多数情况的空腔都适用。包括那些含有定向反射率和发射率壁的

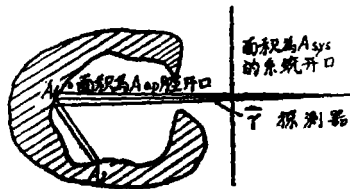


图 4 Bartell 和 Wolfe 的腔辐射示意图

空腔。其次，如果腔壁表面是灰体和朗伯表面，而且来自孔的辐射是可以忽略的，再运用积分计算的平均值定理^[35]，展开嵌套积分，以及在等温情形下，得到广义 Gouffé 型公式

$$\varepsilon_L(\vec{r}) = \varepsilon_a(x) = 1 - \rho_a(x) = \frac{\varepsilon[1 + (1 - \varepsilon)(B - A)]}{\varepsilon(1 - B) + B} \quad (15)$$

式中各项的意义结合表 1 说明。

表1 (15) 式中的A和B的值

理 论	发射率的形式	A	B
Bartell 和 Wolfe	$\varepsilon_L(\vec{r})$	F	\bar{F}
De Vos	$\varepsilon_L(\vec{r})$	F	\bar{F}
Integral equation	$\varepsilon_a(x)$	F	\bar{F}
Kelly	$1 - \rho_a(x)$	F	s/S
Gouffé	$1 - \rho_a(x)$	ω/π	s/S
Treuenfels	$1 - \rho_a(x)$	F*	F*

表1中各项的意义如下:

$$F = \pi^{-1} \int_{\Omega} d\Omega,$$

\bar{F} = F 的加权平均值 (见参考文献^[30]);

$$F^* = \int F^2 dA / \int F dA,$$

ω = 相应于F的立体角;

s = 开口面积;

S = 总的腔的表面积, 等于孔面积加上壁面积。

这里值得注意的是得到Gouffé型新公式的假设与Gouffé的经二次反射后, 辐射照度均匀假设是有实质性差别的。

我国的谢顺康同志提出了计算非等温漫射空腔表面局部有效发射率的一种Gouffé型新公式, 描述了在等温和非等温漫射圆锥和圆筒形空腔时的应用^[36]。在等温腔的特殊情况下, 他的(8)式和(11)式均可化成Bartell和Wolfe的公式。

五、结 论

本文评述了各种黑体空腔辐射理论 (除Mont—Carlo法以外)。公式(15)和表1的紧密符合, 明显地反映出六种不同理论分析之间的一致性。谢顺康从关于空腔壁表面发射的普遍理论公式推导出的结果, 既符合积分方程分析, 又符合多重反射分析^[37]。从另一方面说明了各种理论之间的一致性。

本文的分析、比较可以预测各种理论的发展趋势。

De Vos考虑了腔壁的非漫射特性, 但难以求得二级以上的近似, Bartell和Wolfe的分析可用作推广De Vos理论至包含有更高级的近似。在这方面, Mont—Carlo法的最新应用正展现出黑体空腔理论的新前景^[38]。

参 考 文 献

- [1] H. Buckley, Phil. Mag., 4, (1927), 753—762, 6, (1928), 447—457, 17, (1934), 576—581
- [2] M.G. Rossman and J. Yarwood, Brit., J. Appl. Phys., 5, (1954), 7
- [3] J. Vollmer, J. Opt. Soc. Am., 47, (1957), 926
- [4] E.M. Sparrow, L.U. Albers, J. Heat Transfer, 82, (1960), 253—254, 84, (1962), 73—79

- [5] E.M.Sparrow, V.K.Jonsson, *J. Opt. Soc. Am.*, 53, (1963), 816—821
- [6] E.M.Sparrow et al., *Appl. Opt.*, 4, (1965), 41—42, 9, (1970), 2569—2572
- [7] T.J.Quinn, *Brit. Appl. Phys.*, 18, (1967), 1105—1123
- [8] R.E.Bedford, C.K.Ma, *J. Opt. Soc. Am.*, 64, 3(1974), 339—349
- [9] R.E.Bedford, C.K.Ma, *J. Opt. Soc. Am.*, 65, 5, (1975), 565—572
- [10] R.E.Bedford, C.K.Ma, *J. Opt. Soc. Am.*, 66, 7, (1976), 724—730
- [11] 褚载祥等人; 红外物理与技术, No.2, (1979) 46—53; No.3(1979), 30—35
- [12] 陈守仁等; 哈尔滨工业大学学报, No.1(1979), 20—28
- [13] 陈守仁等; 计量学报, 1, 3(1980), 171—178
- [14] Chu Zaixiang, et al., *J. Opt. Soc. Am.*, 70, 10, (1980), 1270—1274
- [15] 褚载祥等; 哈尔滨工业大学学报, No.4(1980), 125—132 刘景生; 光学精密机械学院学报, No.1, 1985年
- [16] R.J.Chandos, R.E.Chandos, *Appl. Opt.*, 13, 9, (1974), 2142—2152
- [17] A.Gouffé, *Rev. Opt.*, 24, (1945), 1
- [18] C.L.Sanders and B.A.Stevens, *Rev. Opt.*, 33, (1954), 179
- [19] F.J.Kelly and D.G.Moore, *Appl. Opt.*, 4, (1965), 31
- [20] 同 [7] ;
- [21] J.C.De Vos, *Physica*, 20, (1954). 669—689
- [22] E.W.Treuenfels, *J. Opt. Soc. Am.*, 53, (1963) 1162—1171
- [23] P.Campanaro and T.Ricolfi, *Appl. Opt.*, 5, (1966), 926—932
- [24] F.J.Kelly, *Appl. Opt.*, 5, (1966), 925—927
- [25] W.R.Blevin and W.J.Brown, *Metrologia*. 7, (1971), 5—29
- [26] Yoshiko Ohwada, *J. Opt. Soc. Am.*, 71, 1, (1981) 106—111
- [27] S.Takata, *J. Illum. Eng. Inst. Jpn.*, 51, (1967), 702—713
- [28] E.M.Sparrow and R.D.Cess, *Radiation Heat Transfer (Brooks/cole, Belmont, Calif., 1966)*
- [29] M.L.Fecteau, *Appl. Opt.*, 7, 7(1968), 1363—1364
- [30] F.E.Nicodemus, *Appl. Opt.*, 7, 7, (1968), 1359—1362
- [31] F.O.Bartell and W.L.Wolfe, *Appl. Opt.*, 15, (1976), 84—88
- [32] R.E.Bedford, *Temperature, Its Measurement and Control in Science and Industry (Instrument Society of America, Pittsburgh, pa. 1972)*, 4, 425—434
- [33] R.E.Bedford, *Advance in Geophysics*, A.J.Drummond, ed. (Academic, New York, 1970), 14, 165—202
- [34] F.E.Nicodemus, *Appl. Opt.*, 9, (1970), 1474
- [35] G.A.Korn. and T.M.Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers (McGraw—Hill, New York, 1981)*, 119
- [36] 谢顺康; 计量学报, 3, 1, (1982), 61—69
- [37] 谢顺康; 计量研究, No.2 (1979)
- [38] A.Ono, *J. Opt. Soc. Am.*, 70, (1980), 547

A Discussion of the Radiant Theory of the Cavity-type Blackbody

Liu Jingsheng

Abstract

This paper is a review of the theories of cavity radiant sources of the quasi-blackbodies with the emphasis on the integral equation theory of the cavities, Gouffé theory and De Vos theory, including their developing status. It shows the identity of these theories and their development prospect.