

星点像二维光强分布的定量测定

张 晓 辉 韩 昌 元

(国家光学机械产品质量检测中心)

摘要 介绍了测试显微物镜星点像二维光强分布的实验方法。内容包括实验原理,利用微型机进行二维快速离散傅立叶变换、数据拟合的方法,并讨论了如何选择测试的方位数及二维离散傅立叶变换的抽样间隔。

一、前 言

光学系统在设计过程中和设计完成以后,需要对该光学系统进行成像质量的评价。评价的理论依据是物空间的一个物点所发出的光强经过光学系统后在像空间的分布情况。点物在像空间的光强分布就是光学系统的点扩散函数,而光学传递函数则是点扩散函数在频率空间相应的一种表示方法。尽管二者考虑问题的角度不同,但是二者所包含的信息却是等价的,它们都反应出光学系统的像质特性。

光学传递函数全面、客观、准确地反应了像质的优劣情况。因此,国内外许多人都研制出了各种光学传递函数测定仪。然而,到目前为止,各种光学传递函数测定仪仅限于对线扩散函数和一维光学传递函数的测试,但这不能反应出光学系统二维成像的全部信息。目前,在生产厂家和检验部门经常使用的目视星点检验法,该方法灵敏度高,并且能反应光学系统的二维成像情况,与二维的光学传递函数具有等价的效果,但是,它不定量,而且与检验人员的主观因素有关,这是星点检验法的不足之处。

本实验是在长春光机所研制的“显微物镜传递函数测定仪”测试线扩散函数和一维光学传递函数的基础上,完成对显微物镜的点扩散函数的二维分布和二维光学传递函数的定量测试。

二、基本原理和方法

1. 点扩散函数、线扩散函数与光学传递函数

在非相干照明的情况下,物平面上的点物经过光学系统后,在像平面上的光强分布为 $h(x, y)$, 考虑到相对量才有意义, 将其归一化为:

$$PSF(x, y) = h(x, y) / \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) \quad (1)$$

$PSF(x, y)$ 被定义为点扩散函数。

对于满足线性空间不变条件的成像系统, 点扩散函数完全表征了成像系统的性质, 与物

平面上光强分布的具体形式无关。为了方便计算，常常在频谱空间中考虑问题。点扩散函数的二维傅立叶频谱，用 $OTF(u, v)$ 表示：

$$OTF(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} PSF(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (2)$$

光学传递函数 $OTF(u, v)$ 表征了一个非相干成像系统在频谱空间的成像特性，点扩散函数 $PSF(x, y)$ 表征了成像系统在坐标空间的成像特性，二者所包含的信息是等价的。从点扩散函数到光学传递函数只是用傅立叶变换的方法进行了一次从“空域”到“频域”的坐标变换。

一般情况下，点扩散数的一维量值与一维光学传递函数也有意义。

一维坐标情况下，物体是具有单位量值的无限细的狭缝，它在像面上的分布也是一条线状分布。这个响应函数被定义为线扩散函数，用 $LSF(x)$ 表示：

$$LSF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} PSF(x, y) dy \quad (3)$$

可见，线扩散函数是点扩散函数在某一方向上的一维线积分值。对线扩散函数进行一维傅立叶变换将得到一维光学传递函数：

$$OTF(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} LSF(x) \exp(-i2\pi ux) dx \quad (4)$$

2. “从投影重构像”原理

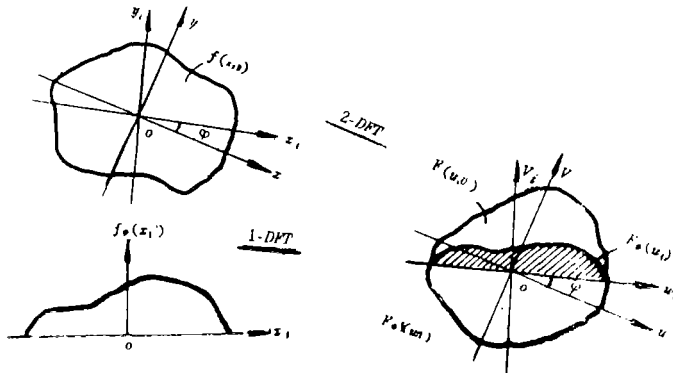


图1

由前面的介绍可知，线扩散函数是点扩散函数在某一方向上的一维线积分值。因此，可把线扩散函数称为点扩散函数在某一方向上的“投影”。即：

$$LSF_{\varphi}(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} PSF(x_i, y_i) dy_i \quad (5)$$

$LSF_{\varphi}(x_i)$ 表示 φ 方向上的线扩散函数，即：点扩散函数在 φ 方向的一维积分值。取“投影”的傅立叶变换得：

$$\begin{aligned} OTF_{\varphi}(u_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} LSF(x_i) \exp(-i2\pi u_i x_i) dx_i \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} PSF(x_i, y_i) \exp[-i2\pi(u_i x_i + 0y_i)] dx_i dy_i \end{aligned} \quad (6)$$

而原点扩散函数的二维傅立叶变换为:

$$OTF(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} PSF(x, y) \exp[-i2\pi(u_i x_i + v_i y_i)] dx_i y_i \quad (7)$$

从二式的比较中可以看出, 点扩散函数 $PSF(x, y)$ 在方位方向上的投影值 $LSF\varphi(x_i)$ (φ 方向的线扩散函数) 的一维傅立叶变换 $OTF\varphi(u_i)$ (φ 方向的一维光学传递函数), 恰好是点扩散函数 $PSF(x, y)$ 的二维傅立叶变换频谱 $OTF(u, v)$ (二维的光学传递函数) 在 φ 方位方向的分量值 (此时 $v_i = 0$) 见图 1。

当以星点为目标时, 在像面上用狭缝从各个方位方向上扫描星点像, 就会得到点扩散函数在各个方向上的投影值—线扩散函数, 对各个方向上的线扩散函数分别进行一维傅立叶变换, 可求得各个方向上的一维传递函数, 而该值恰是二维光学传递函数在该方向上的分量。如果对这些分量值进行二维傅立叶逆变换, 将得到点扩散函数的二维分布。

根据上述原理, 利用“显微物镜传递函数测定仪”, 通过对显微物镜进行多个 φ 方位方向 (φ 的范围为 $0^\circ \sim 180^\circ$) 的一维光学传递函数的测试, 可以得到二维光学传递函数在各个方位方向上的分量值, 然后对得到的二维频谱进行二维傅立叶逆变换, 可得到点扩散函数的二维分布情况。

3. 二维快速离散傅立叶变换

对点扩散函数进行二维傅立叶变换时, 连续形式为:

$$OTF(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} PSF(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (8)$$

由于微机上是不能进行二维连续傅立叶变换的, 并且, 实验所获数据也都是离散的, 因此, 应当采用离散形式的傅立叶变换法。为了计算方便, 只考虑某些特定的空间频率处的变换值。

设 x, y 二方向的离散点数为 N , 离散点间距为 Δ , $PSF(n\Delta, m\Delta)$ 表示 x 方向第 n 个离散点, y 方向第 m 个离散点处的点扩散函数的值, $\Delta f = 1/(N \cdot \Delta)$ 则分别表示 u, v 二个方向上的频率间隔。利用 (8) 式计算出 $(K\Delta f, L\Delta f)$ 点处的 OTF 值。于是有:

$$OTF(K\Delta f, L\Delta f) = \Delta \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-i2\pi nK/N) \cdot \left[\Delta \sum_{m=0}^{N-1} PSF(n\Delta, m\Delta) \exp(-i2\pi mL/N) \right] \quad (9)$$

一般地, K, L 的取值为正整数 $(0, 1, 2, \dots)$ 。由于 e 指数存在着周期性, 即:

$$\exp[-i2\pi n(N + K')/N]_{K'=N+K'} = \exp[-i2\pi nK'/N]_{K'} \quad (10)$$

K' 的取值范围为: $(0, 1, 2, \dots, N-1)$ 。

可见, e 指数的周期为 N 。当 K 取 $N, N+1, \dots$ 所计算出的 OTF 值, 只不过是 $0, 1, \dots, N-1$ 这个范围内所计算出的 OTF 值的一个重复。因此, K, L 的取值范围定义为 $(0, 1, \dots, N-1)$ 。通过上述的分析, 我们可以计算出 OTF 的最高空间频率:

$$f_c = 1/(2\Delta) \quad (11)$$

即: OTF 的最高空间频率与采样间隔成反比。

同样, 对于二维傅立叶逆变换, 其离散形式为:

$$PSF(K \wedge, L \wedge) = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} \exp(i2\pi nK/N) \cdot \left[\Delta f \sum_{m=0}^{N-1} OTF(n \Delta f, m \Delta f) \exp(i2\pi mL/N) \right] \quad (12)$$

Δf OTF 的抽样间隔

K, L 的取值范围为: $0, 1, \dots, N-1$

Δ 为计算所得的 PSF 的间隔: Δ

$$\Delta = 1/N \Delta f \quad (13)$$

PSF 的截止坐标为:

$$x_0 = 1/2 \Delta f \quad (14)$$

在进行二维离散傅立叶变换时, 采用快速算法, 以一维快速傅立叶变换为基础, 将二维傅立叶变换转化为一维离散傅立叶变换。

$$OTT(n, L) = \Delta \sum_{m=0}^{N-1} PSF(n \Delta, m \Delta) \exp(-i2\pi mL/N) \quad (15)$$

$$OTF(K, L) = \Delta \sum_{n=0}^{N-1} OTT(n, L) \exp(-i2\pi nK/N) \quad (16)$$

从上式可以看出: (15) 式恰好是以 n 为参变量的 PSF 在 y 方向上的一维离散傅立叶变换, (16) 式恰好是以 OTT 为待变换值的 x 方向上的一维离散傅立叶变换, 二次变换后, 完成了二维离散傅立叶变换。根据这一关系, 可以将二维离散傅立叶变换分解为二次一维离散傅立叶变换, 而对于一维离散傅立叶变换, 均采用 FFT 算法, 从而得到二维离散傅立叶变换的快速算法。根据这种思想, 我们编制了长度为 256×256 的二维快速离散傅立叶变换程序。在内存较小的微机上进行长度较长的二维变换时, 将微机的外存贮器作为大容量的存贮空间, 采用联合利用微机内存空间和外存贮器的方法, 在微机上实现了长度较长 (256×256) 的二维离散傅立叶变换。

4. 数据拟合的方法

前面介绍了二维离散傅立叶变换方法, 这种方法要求被变换的二维光学传递函数在直角坐标系的 u, v 二个直角方向上被等间距抽样, 但由测定仪所得到的二维光学传递函数却是径向上 (极坐标系中半径方向) 等间距、方位方向上等角间距的离散数据。为此, 我们利用数学上的多项式最佳逼近拟合的方法和最小二乘法, 根据已获得的离散的光学传递函数值, 求得参与离散傅立叶逆变换的直角坐标系中等间距网格点上的数据, 然后对这些数据进行二维离散傅立叶逆变换, 就可以获得点扩散函数的二维分布情况。

三、分析讨论

1. 二维离散傅立叶变换的抽样间隔的选取

利用离散傅立叶变换代替连续傅立叶变换求点扩散函数时, 要求光学传递函数是被等间距抽样的, 而且, 抽样间隔必须满足抽样定理, 即频谱而频率间隔 Δf 满足:

$$\Delta f \leq 1/2x_0 \quad (17)$$

x_0 点扩散函数的截止坐标

理论上点扩散函数的截止坐标是无限的 ($x_c \rightarrow \infty$), 则根据 (17) 式求出 $\Delta f \rightarrow 0$, 这在实际中是不可能的。

根据夫朗和费衍理论可知: 具有圆形光瞳的理想光学系统的夫朗和费衍射强度为:

$$I(\theta) = I_0 [2J_1(x)/x] \tag{18}$$

$$x = 2\pi a \sin/\lambda$$

通过理论的计算可知, 衍射光中84%的能量集中在爱里斑内, 其余16%的能量分布在其他各级亮环中。设爱里斑内的光能为1, 则第一级亮环的光能下降到1.7%, 第二级亮环的光能为0.42%, 第三级亮环的光能为0.16%, 能量依次减弱。对于显微镜系统, 实际的光学系统与理想光学系统的主要区别是能量将分散些, 但是等到第五级暗环以外, 能量将微乎其微。可将第五级暗环的位置作为点扩散函数的截止坐标。根据镜头的参数和衍射公式, 推算出 $x_c = 52.4 (\mu\text{m})$, 根据 (17) 式可求出 OTF 的抽样间隔 $\Delta f \leq 9.54 (\text{c/mm})$ 。

2. 有限个不连续的测试方位数的选取

在测试线扩散函数和一维传递函数时, 只能测试有限个不连续的方位方向上的 OTF 值, 这会使再生像质有所下降。我们根据抽样定理, 适当地选择测试方位数, 可使再生像在以 x_c 为半径的圆形区域内与连续的全方位测试的再生像一致。

在谱面上, 以 ρ_0 为半径的圆内, $\Delta\theta$ 所对应的最大弧长为 $\rho_0\pi/M$ (M 表示测试的方位数), 这就是截止频率范围以内抽样点的最大间距, 抽样定理要求:

$$M \geq 2\pi \rho_0 x_c \tag{19}$$

M 表示 $0^\circ \sim 180^\circ$ 方位方向上等间隔测试的方位数; ρ_0 为传函的截止频率,

$$\rho_0 = 2N \cdot A / \lambda, \quad N \cdot A \text{ 为数值孔径。}$$

当 $x_c = 52.4 (\mu\text{m})$, 对于10倍、 $N \cdot A = 0.25$ 的显微物镜 ($\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, $\rho_0 = 100 \text{c/mm}$), 根据 (19) 式可计算出 $M \geq 32.9$ 。实际测试时, 选取 $M = 36$, $\Delta\theta = 5^\circ$ 。

3. 抽样间隔 Δf 及离散傅立叶变换长度的确定

以 5° 为角度间隔进行测试线扩散函数和一维传递函数时, 以 ρ_0 为半径的圆周上弧长间隔等于 $\rho_0\pi/M = 8.73 (\text{c/mm})$, 为不丢失信息, 选取 $\Delta f = 9 (\text{c/mm})$, 以该这个值为抽样间隔对 OTF 抽样, 可求出点扩散函数的截止坐标为 $x_c = 55.6 (\mu\text{m})$, 点扩散函数的离散点间距 Δ 为:

$$\Delta = 1/(N \cdot \Delta f) \tag{20}$$

N : $IDFT$ 的长度。

Δf 确定后, N 越大, Δ 越小, 越能反映出点扩散函数的真实情况。在微型机容量和计算时间允许的情况下, 选取 $N = 256$, 则, $\Delta = 0.434 (\mu\text{m})$, 点扩散函数离散点间距完全满足测试截止频率为 $\rho_0 = 100 \text{c/mm}$ (10倍, $N \cdot A = 0.25$ 的显微物镜像面) 的点扩散函数的抽样间隔, 也就是: $\Delta < 5 (\mu\text{m})$ 。

在谱面上对光学传递函数进行抽样时, 频谱范围为 $(-100 \text{c/mm}, 100 \text{c/mm})$, 当以 9c/mm 对 OTF 进行抽样时, 频谱范围内是利用对测得的离散数据进行拟合而得到的, 抽样点数不足256, 将频谱范围以外的抽样点补零, 使得抽样点数达到256。

四、结果及误差分析

我们对10倍、 $N \cdot A = 0.25$ 的显微物镜进行了轴上点的测试, 得到了显微物镜星点像的

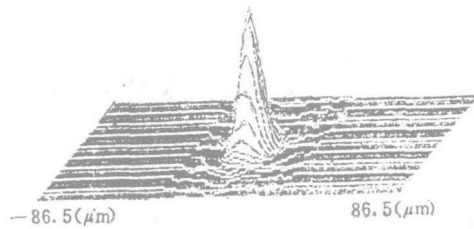


图 2

二维光强分布、(见图 2)。

10倍、 $N.A. = 0.25$ 的显微物镜成像是比较理想的，像面上理想衍射斑大小为 $24.4(\mu\text{m})$ ，通过本实验，我们实现了像面上光斑大小为 $25(\mu\text{m})$ 左右的光强分布的定量测定。

测试结果的误差来源有以下几个方面：

1. 使用仪器测试时，由目视系统对星点调焦，它将受主观因素的影响，导致调焦的不准确，产生离焦现象，给测试结果带来误差。

2. 当测试多个方位方向的线扩散函数和一维的光学传递函数时，需要将狭缝转过一定的角度，由于狭缝机构在转动时，出现显微镜上下漂移的现象，使得已经调好焦的星点像又产生离焦现象，这会给每次测试带来较大的偏差，是给实验结果带来误差的一个主要原因。

3. 根据取样定理，如果对利用上述的测试条件所得到的离散形式的光学传递函数直接进行傅立叶逆变换，得到的结果是与连续角间隔测量时 ($\Delta\theta = 0$) 所获得的结果完全一致。然而，在利用微机进行离散傅立叶逆变换时所需要的等间距网格点上的数据是利用数据拟合的办法得到的，拟合本身是会给测试结果带来误差的。我们用理想衍射受限系统的传递函数模拟测试的一维传递函数进行数据拟合，经计算，拟合的最大误差为2%。

五、结 束 语

本文提出了定量测试显微物镜星点像二维光强分布的一种方法。对于不能采用逐点法进行测量的能量较弱的小星点像，利用“从投影重构像”原理，实现了对它的定量测定。本实验的方法不仅可以定量测试显微物镜星点像二维光强分布，还可以用于测试其他小光斑的二维光能量的分布。

参 考 文 献

- [1] 韩昌元；《信息光学基础理论及其应用》，长春出版社，1989，12
- [2] 马场直志；《投影からの像再生法とフィルタリングに関する》，北海道大学，1980
- [3] 母国光，战元龄；《光学》，人民教育出版社，1979
- [4] 徐萃薇；《计算方法引论》，高等教育出版社，1985
- [5] 王树勋；《数字信号处理及实验》(上，下册)，吉林工业大学，1988，3
- [6] 尾本義一，小卿宽；《公式と数表》，電気書院株式会社，1964，10

The Quantitative Measurement of the Two Dimensional Intensity Distribution of Star Image

Zhang Xiaohui, Han Changyuan

Abstract

In this paper, a method is given to measure the two dimensional light intensity distribution of star image of microscope objective. It includes the experiment principle, the computation of two dimensional FFT with conventional computer, data fitting and software design. It discusses how to select the value of measuring azimuth as well as the sampling interval of two dimensional FFT.