锥形砂轮刀具加工二面角时刀具倾角的计算

潘毓学

（长春光机学院机械工程系）

摘要 对锥顶角为2β的锥形砂轮加工二面角为2α的工件时，刀具倾角φ应满足的关系式进行了研究，并计算出相应的角度值，供加工使用。

关键词：锥形砂轮；二面角

一、引 言

在加工二面角为2α的工件时，可以用锥顶角等于2α的锥形砂轮，也可用锥顶角为2β，$2\beta<2\alpha$的砂轮。但砂轮轴线需倾斜一定的角度φ，以满足加工的要求。有些厂家仅仅根据经验来加工二面角，其结果是效率较低，废品率较高。

本文根据实际生产中提出的问题、首先建立锥形砂轮的曲面方程式，通过坐标变换，并根据包络原理导出锥顶角、二面角、刀具倾角三者的关系式，进而计算出相应的角度值、以期达到解决实际问题的目的。

二、座标系的选取及锥形砂轮的曲面方程式

固定坐标系为 $\sigma=(0;x,y,z)$ 动坐标系为 $\sigma^{(1)}=(0_1;x_1y_1z_1)$ 如图1所示。

刀具轴线与z轴夹角为ϕ（倾角）。

刀具锥顶角为2β，半角为β。

刀具轴线z_1相对z轴转过ϕ角后，其运动规律为：绕z_1轴转动且沿z轴向上平动。刀具曲面在$\sigma^{(1)}$中的方程式为：

$$x_1^2+y_1^2-z_1^2\operatorname{tg}\beta=0 \qquad (1)$$

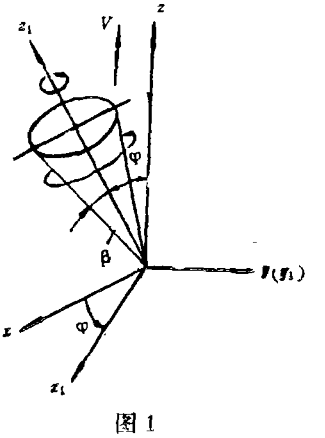

图1

由$\sigma\to\sigma^{(1)}$的变换矩阵为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad x_1 = x\cos\phi - z\sin\phi$

$\quad\quad y_1 = y$

$\quad\quad z_1 = x\sin\phi + z\cos\phi$

将x_1, y_1, z_1代入锥面方程式（1），则得到刀具在σ中的方程式为：

$$(x\cos\phi - z\sin\phi)^2 + y^2 - (x\sin\phi + z\cos\phi)^2\mathrm{tg}^2\beta = 0$$

经化简整理得：

$$x^2[1-\sin^2\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta)] + y^2 + [\sin^2\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \mathrm{tg}^2\beta]z^2$$
$$-2xz\sin\phi\cos\phi(1+\mathrm{tg}^2)\beta = 0 \qquad (2)$$

三、椭圆族包络线方程式

令平面方程 $z = k$ 与锥面方程相交，则其交线为一椭圆。若 $z = k$ 是一变量，则截交线为一系列的椭圆方程即：

$$x^2[1-\sin^2\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta)] + y^2 + [\sin^2\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \mathrm{tg}^2\beta]k^2$$
$$-2xk\sin\phi\cos\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta) = 0 \qquad (3)$$

令椭圆族方程（3）为$F(x,y,k)=0$，其中 k 为族参数，则其包络线方程为：

$$\begin{cases} F(x,y,k) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial k} = 0 \end{cases}$$

由 $\dfrac{\partial F}{\partial k} = 0$ 得

$$k[\sin^2\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \mathrm{tg}^2\beta] - x\sin\phi\cos\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta) = 0$$

$$k = \frac{x\sin\phi\cos\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta)}{\sin^2\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \mathrm{tg}^2\beta} = \frac{x\sin\phi\cos\phi(1+\mathrm{tg}^2\beta)}{(\sin^2\varphi - \sin^2\beta)(1+\mathrm{tg}^2\beta)}$$

$$= \frac{x\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\beta} \qquad (4)$$

将 k 代入方程$F(x,y,k)=0$ 则

$$x^2[1-\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta)] + y^2 + \frac{x^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^2\varphi-\sin^2\beta)^2}[\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \mathrm{tg}^2\beta]$$

$$-2\frac{x^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\beta}\sin\varphi\cos\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta) = 0$$

$$\therefore\quad x^2\{1-\sin\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta) + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^2\varphi-\sin^2\beta)^2}[\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \mathrm{tg}^2\beta]$$

$$-2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\beta}(1+\mathrm{tg}^2\beta)\} + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2[1-\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta) - \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}(1+\mathrm{tg}^2\beta)] + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2[1-\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta)(1+\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta})] + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2[1-\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta)\left(\frac{\sin^2\varphi-\sin^2\beta+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}\right)+y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2[1-\sin^2\varphi(1+\mathrm{tg}^2\beta)\quad\frac{1-\sin^2\beta}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}]+y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2[1-\sin^2\varphi\ \sec^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}]+y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2\left[\frac{\sin^2\varphi-\sin^2\beta-\sin^2\varphi}{\sin^2\phi-\sin^2\beta}\right]+y^2=0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}x^2+y_1{}^2=0$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}\cdot x^2$$

若$\sin^2\varphi-\sin^2\beta>0$时，则有

$$y=\pm\frac{\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}}x \qquad (5)$$

由此方程式可知椭圆族的包络线为两条直线，其斜率为:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\pm\frac{\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}} \qquad (6)$$

而 $y=\mathrm{tg}\,\alpha x$ 的图形如图2所示

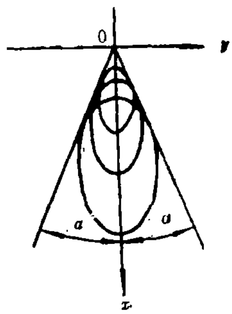

图2

四、锥半顶角β、二面角的半角α，倾角φ之间的关系式

$$\because\quad \sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{\pm\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\varphi-\sin^2\beta}}}$$

$$=\pm\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$$

最后可得:

$$\sin\beta=\sin\alpha\cdot\sin\varphi \qquad (7)$$

根据此式可知，为要加工要求的α角选用有限的β角砂轮，只要满足相应的φ角即可。表1为计算结果。

表 1

$\beta°$	$\alpha°$	$\varphi°$	$\beta°$	$\alpha°$	$\varphi°$
5	5	89.99979	10	10	89.99979
5	5.25	72.27036	10	10.25	77.38517
5	5.5	65.41324	10	10.5	72.34063
5	5.75	60.44937	10	10.75	68.58628
5	6	56.49088	10	11	65.51389
5	6.25	53.1846101	10	11.25	62.88455
5	6.5	50.34528	10	11.5	60.57415
5	6.75	47.86051	10	11.75	58.50796
5	7	45.65599	10	12	56.63671
5	7.25	43.67924	10	12.25	54.92575
5	7.5	41.89172	10	12.5	53.34959
5	7.75	40.26401	10	12.75	51.88879
5	8	38.77315	10	13	50.52809
5	8.25	37.40082	10	13.25	49.25524
5	8.5	36.13205	10	13.5	48.06024
5	8.75	34.95458	10	13.75	46.9348
5	9	33.85809	10	14	45.8719
5	9.25	32.83394	10	14.25	44.86559
5	9.5	31.87468	10	14.5	43.91077
5	9.75	30.974	10	14.75	43.003
			10	15	42.13841

五、应用此计算图表的几点说明

1. 数表中的β角为锥半顶角，α为二面角的半角，φ为刀具轴线相对z轴的倾角。若刀具的轴线初始位置于x轴上(即水平轴)，则刀具的倾角为（$90°-\varphi$)。

2. 使用此数表的步骤是先确定被加工的二面角2α，然后根据数表选定相应的刀具锥顶角后2β后，再由数表中找到对应的刀具倾角φ。例如$\alpha=14°$（即被加工二面角为20°），由给出的数表中知$\beta=10°$（即刀具锥顶角为20°），$\varphi=45.8719°$。

3. 本文的计算结果没考虑机床的系统误差。若机床为一理想系统，所加工的二面角不论精度多高，利用本程序均可算出倾角φ（刀架的分度精度本身必须能达到所要加工的精度）

4. 考虑机床系统误差及刀具本身的公差对加工精度的影响关系，将另文发表。

The Inclined Angle Calculation of the Cutting Tool for Machining a Dihedral Angle by a Tapered Grinding Wheel

Pan Yuxue

Abstract

In this paper, the equation that the cutting tool inclined angle ϕ should be satisfied is derived when a workpart with a dihedral angle 2α is machined by a tapered grinding wheel with a cone opex angle of 2β. The corresponding value of the angle is also given for practical uses.

Key words: Tapered Grinding Wheel, Dihedral Angle.