

# 网络拓扑分析方法应用于复杂系统建模

张 景 旭

费 时 雨 李 肇

(长春光机所)

(北京邮电学院)

**摘要** 将图、网络概念引入到机械系统,用于复杂系统物理模型及数学模型的建立。详细介绍了“机械链原理”及“网络拓扑分析原理”,实现了对“光纤张力试验机恒张力系统”的建模。

## 一、引 言

在工程上,复杂系统可以由若干不同的物理系统所组成,包括机械系统、电气系统、液压系统以及热力系统。在研究这些系统时,人们首先关心其静态特性,更主要是了解其动态特性。近年来,随着电子计算机技术的发展和成熟,给我们分析复杂系统创造了有利条件。对系统进行动态特性分析,可以使我们在实际系统建立之前,就能预示其特性,了解各种相关因素对系统特性的影响,因而,可以通过对系统进行动态特性分析来指导设计,这种设计称为动态设计。在当前美国和日本的汽车行业普遍采用动态设计,从而使他们的产品在性能上占有优势,提高了市场竞争力。对复杂系统进行动态分析,一般步骤是对组成系统各元件特性进行分析,用理想的物理元件抽象出最能代表实际系统的物理模型,再根据物理定律来建立起数字模型。有了数字模型,就可以在计算机上进行各种仿真计算。传统的建模方法一般是求出系统的传递函数,建立输入量和输出量之间的因果关系,而对中间过程不予关心。本文结合对“光纤张力试验机恒张力系统”的建模,介绍一种新方法——网络拓扑分析法。

## 二、光纤张力试验机恒张力系统

光纤通信是现代通信的发展方向,是利用光导纤维来传递信号的一种通信技术,它以激光为传递信号的载体,通过调制和解调过程来实现通信。光纤以其通信容量大,传输损耗低,抗电磁干扰能力强,保密性好;适于电视、图像和数字传送等优点,深受世界各国重视。在生产制造过程中,光纤内可能存在物理缺陷,如含有杂质和气泡,这将影响光纤的光学特性和机械性能。一般情况下,在光纤上加质量块,使其受恒定张力,全长经受筛选试验,将强度等于或低于试验水准的点去除。这种装置称为“光纤张力试验机”。目前,我国从国外引进,还没实现国产,整个设备共由三个部分组成:放线装置;筛选装置和收线装置。如图1压带装置由力矩电机控制,使光纤与A、C轮之间保持相对静止,重物 $m$ 以标准质量块的形式加在自由轮B上,以使光纤上产生张力 $T^{(1)}$ 。启动收、放线装置,同时驱动A、C轮以恒定的角速度转动,原则上说,C轮应以同样的转速与A轮一起转动,这样才能保证B轮垂直位置的恒定,但由于各种外界因素的影响,以及设备自身因素的影响,A、C两轮不可

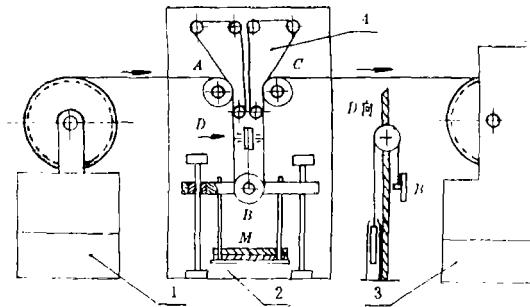


图1 光纤张力试验机示意图

1—放线装置；2—筛选试验箱；3—收线装置；4—压带装置

能完全同步运行，这样在  $A$ 、 $C$  两轮之间光纤试样上要产生一个附加速度  $v_i$ ，使得  $B$  轮处在不稳定状态在质量块  $m$  上就要产生一个惯性力，根据牛顿定律：

$$2T - mg = m \cdot \ddot{x}_B$$

$m\ddot{x}_B$  即是作用在光纤试样上的附加张力，这个附加张力如果大到一定程度，就可以造成光纤非制造缺陷上的断裂。要控制  $m\ddot{x}_B$  的大小，必须控制  $B$  轮的位置恒定，因而这是一个动态问题，也是一个高精问题。

我们可以将恒张力部分拿出来单独分析，如图 2。系统的运动状态为平面运动，自由轮  $B$  的运动可以简化成平动和转动两个部分，因而系统模型可分成两个部分考虑。

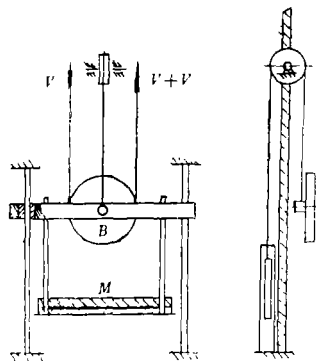
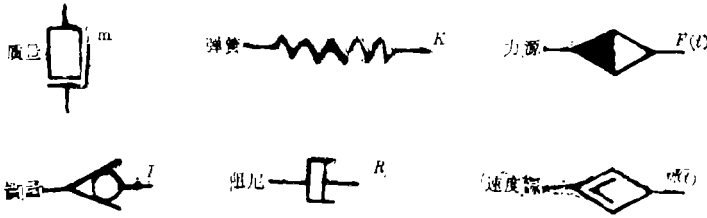


图2 恒张力系统示意图

### 三、机械链作图

机械链<sup>[2]</sup>是指组成动力系统的主动元件和从动元件的集和，并假定它们在外能源作用下所产生的力和速度的相互影响是线性的。将电工学中链的概念引入机械系统，将质量、惯量以及弹簧等机械量集总元件看作是具有两个极的类似于电路元件一样的两端网络，因而，元件之间的连接也同样符合串联、并联定理。

机械链中理想元件符号:



系统物理模型建立:

第一部分: 自由轮  $B$  做转动, 结构图如图 3

$v$ ——光纤试样速度

$v_i$ —— $A$ 、 $C$  两轮不同步引起的速度差

$K_1$ ——光纤试样弹性系数

$I_1$ ——自由轮  $B$  转动惯量

$T_{10}$ ——轴承阻尼力矩

第 2 部分: 自由轮  $B$  做平动

两根光纤可简化成一个弹簧  $K = 2K_1$ , 输入速度为  $\frac{1}{2}v_i$ , 物理模型如图 4,

$m_1$ ——轮  $B$  及框架的总质量

$m_2$ ——标准质量块

$m_3$ ——平衡配重

$I_2$ ——小轮转动惯量

$K_2$ ——拉杆弹性系数

$K_3$ ——钢丝绳弹性系数

$R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ ——粘滞阻尼

$T_{20}$ ——轴承阻尼力矩

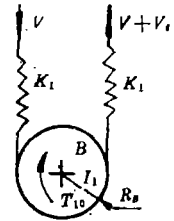


图 3

以上各物理量可通过计算及实验来确定。

对第二部分进行机械链作图:

对各元件相连接的点进行编号,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $I_2$  分别对应节点 1、2、3、4, 参考节点为 0, 代表土地。根据机械链作图原理, 图 4 的机械链形式如图 5

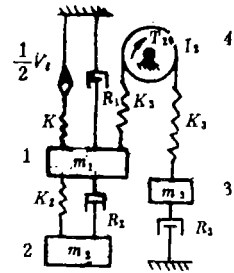


图 4

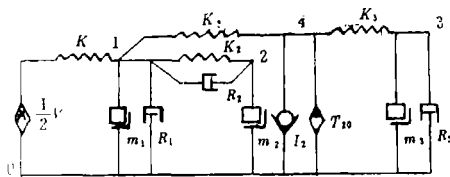


图 5

#### 四、网络拓扑分析方法

在系统动力学里<sup>[3]、[4]</sup>, 网络拓扑分析<sup>[5]、[6]</sup>主要是借鉴电路网络拓扑原理将其广义化, 并

应用于复杂系统的分析上，通过物理系统的一组状态变量来描述系统的输入输出关系，这种方法叫状态变量法。应用网络拓扑原理建立系统的状态空间方程是一种非常适用的建立数学模型的方法。此方法适合于线性及非线性，时变或时不变系统，也适合于多输入多输出系统。本文引入图、树、连支、割集，回路空间  $L$ ，广义割集空间  $C$  等概念，建立起：

- 节点——支路关联矩阵  $A_a$ 。
- 回路——支路关联矩阵  $B_a$ 。
- 广义割集——支路关联矩阵  $C_a$ 。
- 广义基本割集——支路关联矩阵  $C_f$ 。

几个基本定理：

定理 1：回路空间  $L$  和割集空间  $C$  是正交的， $L$  及  $C$  形成了正交子空间  $R$ 。  
 $A_a B_a^T = 0$ ;  
 $B_a C_a^T = 0$ ;  $C_f \cdot B_f^T = 0$

定理 2：矢量  $x \in R^b$ ，满足  $Cx = 0$  则必包含在  $L$  中；矢量  $y \in R^b$ ，满足  $By = 0$  则必包含在  $C$  中。

定理 3：基尔霍夫节点定律  $A_a \cdot l(t) = 0$

定理 4：基尔霍夫回路定律  $B_a \cdot v(t) = 0$

将网络支路分为阻抗支路和导纳支路两部分，阻抗支路包括：惯性元件、力源、摩擦阻尼、粘滞阻尼；导纳支路包括：弹性元件、速度源粘滞阻尼。

阻抗矩阵为： $S = Pm(I) + r$

导纳矩阵为： $Y = r^{-1} + PK^{-1}$

此两矩阵均为对角阵，于是，网络方程可统一为微分形式：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} m \vec{v}_b = -r \vec{v}_b + \vec{Q} \\ \frac{d}{dt} K^{-1} \vec{q}_b = -r^{-1} \vec{q}_b + \vec{v} \end{cases} \quad (1)$$

一般选取惯性元件所在支路为树枝支路，其它支路为连支支路。

与生成树  $T$  相对应的割集矩阵为上三角阵

$$C = \begin{pmatrix} C_{mm} & C_{mr} & C_{mr^{-1}} & C_{mk^{-1}} \\ 0 & C_{rr} & C_{rr^{-1}} & C_{rk^{-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & C_{r^{-1}r^{-1}} & C_{r^{-1}k^{-1}} \\ 0 & 0 & 0 & C_{k^{-1}k^{-1}} \end{pmatrix}$$

简写成分块矩阵： $C = \begin{pmatrix} C_s & C_{s,y} \\ 0 & C_y \end{pmatrix}$

$C_s$  只与  $S$  支路相关， $C_y$  只与  $y$  支路相关

$C_{s,y}$  同时与  $S$ 、 $y$  支路相关。

按上述排列产生的连支  $L$  对应的回路矩阵为下三角阵：

$$B = \begin{pmatrix} B_{mm} & 0 & 0 & 0 \\ B_{rm} & B_{rr} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{r^{-1}m} & B_{r^{-1}r} & B_{r^{-1}r^{-1}} & 0 \\ B_{k^{-1}m} & B_{k^{-1}r} & B_{k^{-1}r^{-1}} & B_{k^{-1}k^{-1}} \end{pmatrix}, \text{ 分块矩阵: } B = \begin{pmatrix} B_s & 0 \\ B_y & B_y \end{pmatrix}$$

根据定理 1 知  $CB^T = 0$ ；即：
$$\begin{bmatrix} C_s & C_{s,y} \\ 0 & C_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_s^t & B_{y,s}^t \\ 0 & B_y^t \end{bmatrix} = 0$$

展开： $C_s \cdot B_s^t = 0$ ； $C_s \cdot C_{y,s}^t + C_{s,y} B_y^t = 0$ ； $C_y B_y^t = 0$  (2)

将系统从动元件用矩阵形式表示如下：

$$E = \begin{bmatrix} Pm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & f \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pk^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pk^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & f \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_r + E_0$$

其中： $E_r$ 为微分元件矩阵； $E_0$ 为非微分元件矩阵

$$\begin{aligned} \text{令: } \overline{x}_1 &= [\overline{v}_m^t \quad \overline{v}_r^t \quad \overline{q}_r^{-t} \quad \overline{q}_s^{-t}]^t \\ \overline{x}_2 &= [\overline{q}_m^t \quad \overline{q}_r^t \quad \overline{v}_r^{t-1} \quad \overline{v}_s^{t-1}]^t \\ \overline{F} &= [\overline{Q}^t \quad \overline{v}^t]^t \end{aligned}$$

于是网络方程 (1) 可写为  $\overline{X}_2 = E\overline{X}_1 + \overline{F}$  (3)

根据定理 3、定理 4 有： $C\overline{q} = 0$ ； $B\overline{v} = 0$

合并后可简写成： $Z_2\overline{X}_2 + Z_1\overline{X}_1 = 0$  (4)

$$\text{其中: 令 } Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_{s,y} \\ 0 & C_y \\ B_s & 0 \\ B_{y,s} & 0 \end{bmatrix}; \quad Z_2 = \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_y \end{bmatrix}$$

将 (3) 式代入 (4) 式有： $(Z_2E + Z_1)\overline{X}_1 = -Z_2\overline{F}$  (5)

(5) 式为一组与网络从动元件支路数相等的方程式。可解出  $S$  支路的速度和  $y$  支路的力。由于网络中，每一个连支的速度均可由树枝速度的线性组合来表示，每一个树枝力又可用连支力的线性组合导出。所以，用  $S$  支路的树支速度和  $y$  支路的连支力作为网络方程的状态变量，即可完全确定网络的运动状态，又可使方程组得到简化。即： $\overline{v}_s = C_s^t \cdot \overline{v}_T$ ； $\overline{q}_y = B_y^t \overline{q}_L$

其中： $\overline{v}_s$ 为阻抗元件速度向量；  
 $\overline{v}_T$ 为树枝速度向量； $\overline{q}_L$ 为连支力向量；  
 $\overline{q}_y$ 为导纳元件力向量；

利用式 (2) 的结论，经过一系列拓扑变换，方程组 (5) 式简化成：

$$\begin{bmatrix} C_s S C_s^t & C_s f B_y^t + C_{s,y} B_y^t \\ -[C_{s,y} B_y^t]^t & B_y Y B_y^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v}_{Ts} \\ \overline{q}_{Ly} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Q} \\ \overline{v} \end{bmatrix} \quad (6)$$

从上式可看出， $y$  支路的树支速度和  $S$  支路的连支力已从方程中消失，从而简化了方程，并使变量相互独立。(6) 式即为所求的状态变量方程组。

## 五、数学模型建立

第一部分： $R_B$ 为轮  $B$  半径，如图 6， $F_{11}$ ， $F_{11}'$ 为轮两边光纤上受的力

根据转动微分方程有:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta} = R_B \cdot (F_{11} - F_{11}') - T_{10} & \dots\dots (1) \\ \frac{dF_{11}}{dt} = K_1 \cdot (v + v_t - \dot{y}) & \dots\dots (2) \\ \frac{dF_{11}'}{dt} = K_1 \cdot (\dot{y} - v) & \dots\dots (3) \\ \dot{y} = R_B \cdot \dot{\theta} & \dots\dots (4) \end{cases}$$

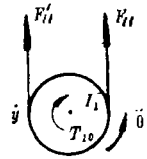


图 6

第二部分: 求出各矩阵代入 (6) 式展开得一组微分方程式

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_2 - F_1 - F_3 - R_1 \cdot \dot{x}_1 + R_2 \cdot (x_2 - x_1) & \dots\dots (1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -F_2 - R_2 \cdot (x_2 - x_1) & \dots\dots (2) \\ m_3 \ddot{x}_3 = F_3' - R_3 \cdot x_3 & \dots\dots (3) \\ I_2 \ddot{\varphi} = R_1 \cdot (F_3 - F_3') - T_{20} & \dots\dots (4) \\ \frac{dF_1}{dt} = K \cdot (x_1 + \frac{1}{2}v_t) & \dots\dots (5) \\ \frac{dF_2}{dt} = K_2 \cdot (x_2 - x_1) & \dots\dots (6) \\ \frac{dF_3}{dt} = K_3 \cdot (x_1 - x) & \dots\dots (7) \\ \frac{dF_3'}{dt} = K_3 \cdot (x - x_3) & \dots\dots (8) \\ \dot{x} = R_L \cdot \dot{\varphi} & \dots\dots (9) \end{cases}$$

其中:  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $\varphi$  分别表示  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $I_2$  相对各自平衡位置的位移。 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_3'$  分别表示弹簧  $K$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  上的附加张力。如将  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  各分离元件按牛顿第二定律及理论力学原理列方程, 可以看到方程形式与上面所推导的结果完全相同, 这就说明用网络拓扑方法推导的方程是正确的。

## 六、小 结

本文将电路中网络拓扑理论引入到机械系统, 实现了对实际的复杂机械系统建模。在建模过程中, 将转动和平动集于一体的元件自由轮  $B$  分成两部分考虑, 使建模思路清楚, 有利于应用拓扑理论。本文在考虑惯性元件时, 注意学位的统一, 将转动惯量  $I$  以  $I/R^2$  的形式放入质量矩阵  $m$ 。这是对《系统动力学》理论的发展和补充。有了数学模型, 就可以和仿真软件相结合, 实现对系统动态特性分析。本文提供的建模方法不仅适合机械系统, 尤其适合机电混合系统。在实际应用中具有重要意义。

### 参 考 文 献

[1] 光纤机械性能试验方法——恒定应力试验, GB8103.1~8103.5—87  
 [2] [苏] H·A·德鲁任斯基,《机械链》, 科学出版社, 1982  
 [3] 谢寄石,《系统动力学》国防工业出版社, 1989  
 [4] 王其藩,《系统动力学》, 清华大学出版社, 1985  
 [5] 陈树柏,《网络图论及其应用》, 科学出版社, 1982  
 [6] 许良军, 硕士论文, 用网络方法分析机械系统的动态特性, 北京邮电学院, 1986

## The Application of Network Topology Analysis Method in Establishing Model for Complex System

Zhang Jingxu, Fei Shiyu and Li Qi

### Abstract

A concept of Graph and Network is introduced into the mechanical system in the paper. It can be used to establish physical model and mathematical model for complex system. The principle of Mechanical Chain and Network Topology Analysis is discussed in detail. The model of constant tension system in the machine of optical fibre tension testing is given as an example.