工程中的类复向量法

赵国文
(吉林职业师范学院机械系，长春 130052)

摘要　首先介绍由作者定义的类复向量的基本理论，然后给出类复向量矩阵和基变换矩阵，最后给出闭链、开链类复向量矩阵方程，并指出这两类方程在工程计算上的应用实例。

关键词：类复向量；类复向量旋转；类复向量矩阵

1 前　言

现代工程中的主要数学手段之一是方向余弦矩阵，它在需要坐标变换的场合颇为有用。而且方向余弦矩阵是正交矩阵，用起来很方便。

然而利用方向余弦矩阵解决工程计算问题，坐标变换次数太多，被变换的向量太多，甚至有些向量被多次变换。而且多个矩阵连乘，运算过程相当繁琐。又因矩阵乘法不满足交换律，所以容易导致计算上的失误。

复向量的旋转具有坐标变换的功能，描述其旋转的幅角的变化就相当于二阶矩阵。因此，复向量已成为平面工程问题计算的广泛应用的数学工具[1,2,3,4]。

有人试图用复向量解决空间问题[5]，也有人试图用一种类似于复向量的三维向量解决空间问题[6]。可惜他们都只能解决极特殊的问题。

在总结他人成果[5,6]的基础上，作者定义了类复向量[7,8,9]像复向量一样，类复向量的三个幅角（绝对欧拉角或相对欧拉角）的变化，也可代替坐标变换，从而可以完全或大部分消除坐标变换，使计算过程明显简化。

当问题非常复杂无法避免坐标变换时，作者巧妙地利用基变换高效地取代坐标变换[7,8,9,10,11,12]，这也是简化计算的原因之一。

2 类复向量基本理论

2.1 类复向量的表达式

在三维正交右手坐标系内，从坐标原点射向空间任意一点的类复向量可表为[7,8,9]

收稿日期：1993年1月6日

$$\vec{R} = ix + jy + kz \tag{1}$$

式中 $i=1$、$j=\sqrt{-1}$、$k=1$——依次为 x、y、z 轴的基（即单位数）；

x、y、z——依次称为第一实部（i 实部）、虚部、第二实部（k 实部）

因为 $\vec{R}=(ix+iy)+kz=ix+(kz+jy)$，即三维向量 $\vec{R}$ 总可表为括号内的复向量与一个实向量的和，所以该三维向量的两维构成复向量，一维是实向量。由于该三维向量的主体（两维之和）是复向量，而整体上又不是复向量，因而称之为类复向量。此处的“类”是类似的意思。

由（1）式知：当 $z=0$ 时，$\vec{R}=ix+iy$ 是 $x\ o\ y$ 面上的复向量；与 $x=0$ 时，$\vec{R}=kz+jy$ 是 yoz 面上的复向量。因此，复向量是类复向量在某一实部为零时的特殊情况。

以进动角 α、章动角 γ、自转角 β 这三个欧拉角给定类复向量 $\vec{R}$ 的空间方位，以 R 表示 $\vec{R}$ 的模，则（1）式可改写成

$$\vec{R} = R[i(\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + k\sin\beta\sin\gamma] \tag{2}$$

三个欧拉角 α、γ、β 也称为类复向量的三个幅角。

如果在 $x\ o\ y$ 面上实行复向量运算，那么（2）式改写成

$$\vec{R} = R\left\{i\sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\gamma}\,e^{j[\alpha+\mathrm{arctg}(tg\beta\cos\gamma)]} + \sin\beta\sin\gamma\right\} \tag{3}$$

（1）、（2）、（3）式分别是类复向量的代数式、三角式、三角一指数式。

代数式和三角一指数式的理论意义大，三角式的实用价值高。

2.2 类复向量的运算法则

把类复向量的相等和共轭也视为运算一起介绍：

2.2.1 相等

如果有

$$\left.\begin{aligned}\vec{R} &= ix_1 + jy_1 + kz_1\\ \vec{R} &= ix_2 + jy_2 + kz_2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

且当 $x_1=x_2$、y_1-y_2、$z_1=z_2$ 时，则有 $\vec{R}_1=\vec{R}_2$。反之亦然。

2.2.2 加　　法

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = i(x_1+x_2) + j(y_1+y_2) + k(z_1+z_2) \tag{5}$$

式中 $\vec{R}_1$ 和 $\vec{R}_2$ 由（4）式给出。

加法满足交换律和结合律。减法是加法的逆运算。

2.2.3 乘　　法

这里我们只规定类复向量的数性乘法运算。为此规定基的数性积：

$$\left.\begin{aligned}ii &= i^2 = 1 \qquad & ij &= ji = j\\ jj &= j^2 = -1 \qquad & kj &= jk = j\\ kk &= k^2 = 1 \qquad & ik &= ki = 0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

于是类复向量的数性乘法为

$$\vec{R}_1\vec{R}_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_2 + y_2z_1) \tag{7}$$

式中 $\vec{R}_1$ 和 $\vec{R}_2$ 由（4）式给出。

数性乘法满足交换律、结合律和分配律。除法是乘法的逆运算。

2.2.4 共轭

如果有

$$\left.\begin{aligned}\vec{R} &= ix + jy + kz \\ \vec{R} &= ix - jy + kz\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

则称 $\vec{R}$ 和 $\tilde{\vec{R}}$ 互为对方的共轭类复向量。显然共轭类复向量的模相等，且对应实部相等，虚部等值反号。

2.3 类复向量的性质

已揭示出类复向量具有 4 个性质[7,8,9]，即下述 4 个定理：

定理 1：共轭类复向量之和为实数，且等于两实部之和的 2 倍。即

$$\vec{R} + \tilde{\vec{R}} = 2(x + z) \tag{9}$$

定理 2：共轭类复向量（数性）之积的实数，且等于模的平方。即

$$\vec{R}\tilde{\vec{R}} = R^2 \tag{10}$$

定理 3：和的共轭类复向量等于各个共轭类复向量之和。即

$$\widetilde{\vec{R}_1 + \vec{R}_2} = \tilde{\vec{R}}_1 + \tilde{\vec{R}}_2 \tag{11}$$

定理 4：（数性）积的共轭类复向量等于各个共轭类复向量之（数性）积。即

$$\widetilde{\vec{R}_1\vec{R}_2} = \tilde{\vec{R}}_1\tilde{\vec{R}}_2 \tag{12}$$

利用前述基本理论不难证明这四个定理。

2.4 类复向量的旋转

2.4.1 由绝对欧拉角描述的旋转

我们称类复向量在绝对参考系里的欧拉角为绝对欧拉角，以 α、γ、β 表示。(2) 式就用绝对欧拉角描述了类复向量的旋转。

对于空间机构和机器人，选装在机架向量上的定坐标系 xyz 就是绝对参考系[8,9,10,11,12]。

如果工程问题的全部类复向量的绝对欧拉角都可直观确定，则完全消除了坐标变换。

2.4.2 由相对欧拉角和基变换描述的旋转

当某些类复向量的绝对欧拉角无法直观确定时，则在适当位置上加装相对参考系 $x_my_mz_m$，然后直观确定这些类复向量在 $x_my_mz_m$，里的欧拉角，即相对欧拉角 α_m、γ_m、β_m。显然相对欧拉角描述了类复向量在相对参考系里的旋转。

以 i_m、j_m、k_m 表示相对参考系的 x_m、y_m、z_m 轴的基，它们与绝对参考系的基 i、j、k 存在以下关系：

$$\left.\begin{aligned}i_m &= i\cos(i_m,i) + j\cos(i_m,j) + k\cos(i_m,k) \\ j_m &= i\cos(j_m,i) + j\cos(j_m,j) + k\cos(j_m,k) \\ k_m &= i\cos(k_m,i) + j\cos(k_m,j) + k\cos(k_m,k)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(13) 式就是基变换一般公式。它描述了相对参考系对绝对参考系的旋转。

这样，如果以 α_m、γ_m、β_m 和 i_m、j_m、k_m 取代 (2) 式里的 α、γ、β 和 i、j、k，就算出了位于相对参考系 $x_my_mz_m$ 里的类复向量在绝对参考系 $x\ y\ z$ 里的量值。这就是利用相对欧拉角和基变换描述了类复向量的旋转。

由于相对欧拉角描述了类复向量在相对参考系里的旋转，所以同样消除了在相对参考系里的坐标变换。而且一次基变换就把处于相对参考系里的类复向量全部变换到绝对参考系里，这也比坐标变换的效能高。

综上所述可知：类复向量方法可以完全消除坐标变换，即使在无法避免坐标变换（就是必须加装相对参考系）时，也是用相对欧拉角消除了在相对参考系内的坐标变换，以及用基变换而不是用坐标变换实现了相对参考系与绝对参考系之间的高效能的变换。因此，使计算过程成几倍乃至十几倍地简化。

3 类复向量矩阵和基变换矩阵

3.1 类复向量矩阵

为适应电子计算机的矩阵运算功能，可以把（2）式写成类复向量矩阵

$$\vec{R} = RM\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中 M—类复向量 $\vec{R}$（在绝对参考系里）的方向余弦矩阵，表为

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\sin\gamma \end{bmatrix} \tag{15}$$

T 是矩阵的转置符号。

3.2 基变换矩阵

为适应电算的要求，（13）式可写成基变换矩阵

$$\begin{bmatrix} i_m \\ j_m \\ k_m \end{bmatrix} = M_d\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \tag{16}$$

式中 M_d—由绝对参考系 $x\ y\ z$ 到相对参考系 $x_m y_m z_m$ 的基变换方向余弦矩阵，其一般形式为

$$M_d = \begin{bmatrix} \cos(i_m,i) & \cos(i_m,j) & \cos(i_m,k) \\ \cos(j_m,i) & \cos(j_m,j) & \cos(j_m,k) \\ \cos(k_m,i) & \cos(k_m,j) & \cos(k_m,k) \end{bmatrix} \tag{17}$$

3.3 常用的基变换方向余弦矩阵

3.3.1 基本基变换方向余弦矩阵

规定对 M_d 加的上标的含义为：第 2 个字母为绕第 1 个字母所代表的轴线逆时针转动的角度。于是有[11,13]：

$$M_d^{z\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$M_d^{y\delta} = \begin{bmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$M_d^{x\beta}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\beta & \sin\beta\\0 & -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\tag{20}$$

3.3.2 复合基变换方向余弦矩阵

由于基本基变换方向余弦矩阵 M_d^{zx}、$M_d^{y\delta}$、$M_d^{x\beta}$ 导出的常用复合基变换方向余弦矩阵有[11,13]：

$$M_d^{(zx)_d(y_m\delta)}=M_d^{y\delta}M_d^{zx}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\delta & \sin\alpha\cos\delta & -\sin\delta\\-\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\\cos\alpha\sin\delta & \sin\alpha\sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix}\tag{21}$$

$$M_d^{(zx)(x_m\beta)}=M_d^{x\beta}M_d^{zx}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\-\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta\\\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\tag{22}$$

$$M_d^{(zx)(x_m\beta)(z_m\gamma)}=M_d^{z\gamma}M_d^{x\beta}M_d^{zx}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma\\-\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma\\\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\tag{23}$$

若为顺时针转动，则相应的转角以负值代入（18）～（23）各式之中。

4 闭链类复向量矩阵方程

工程中许多问题可以抽象为闭链型类复向量系统，如图1所示。由 q 个类复向量组成闭链系统，为使可以直观确定绝对欧拉角的类复向量的数目增多，从绝对参考系 $x\ y\ z$ 的原点把类复向量分成左、右两个分路。假如右分路里的类复向量 $\vec{R}_{m+1}$ 是无法直观确定绝对欧拉角的，则在 $\vec{R}_m$ 上加装相对参考系 $x_my_mz_m$，然后直观确定 $\vec{R}_{m+1}\sim\vec{R}_{m+n}$ 的相对欧拉角。$\vec{R}_f$ 的绝对欧拉角无法直观确定或有意地不加确定，因为利用定理2可以消去它的绝对欧拉角。

如果问题比较复杂，也可能加装两个或三个相对参考系。它们可按需安装在同一或偏同的分路里。现仅就图1所示的加装一个相对参考系的情况，写出闭链类复向量矩阵方程。

$$\vec{R}_f=-\sum_{p=f+1}^{q}R_pM_p\begin{bmatrix}i\\j\\k\end{bmatrix}+\sum_{p=1}^{m}R_pM_p\begin{bmatrix}i\\j\\j\end{bmatrix}+\sum_{p=m+1}^{m+R}R_{p(M_{p(m)})}M_d\begin{bmatrix}i\\j\\k\end{bmatrix}\tag{24}$$

式中 R_p——某类复向量 $\vec{R}_p$ 的模；

M_p——某类复向量 $\vec{R}_p$ 在绝对参考系 $x\ y\ z$ 里的方向余弦矩阵；

$M_{p(m)}$——某类复向量 $\vec{R}_p$ 在相对参考系 $x_m\ y_m\ z_m$ 里的方向余弦矩阵；

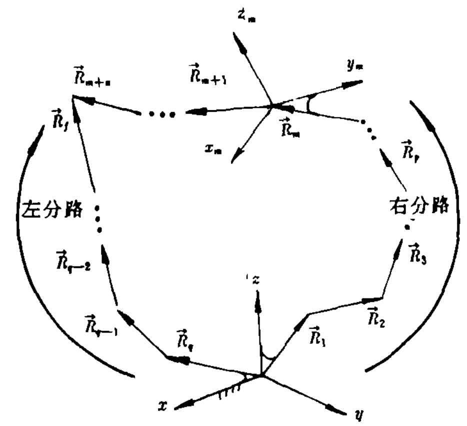

图1 闭链型类复向量系统

$$M_{p(m)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_m \cos\beta_m - \sin\alpha_m \sin\beta_m \cos\gamma_m \\ \sin\alpha_m \cos\beta_m + \cos\alpha_m \sin\beta_m \cos\gamma_m \\ \sin\beta_m \sin\gamma_m \end{bmatrix}^T \tag{25}$$

利用（24）式或与其类似的公式可对任意空间闭链机构进行运动分析[9,12]。

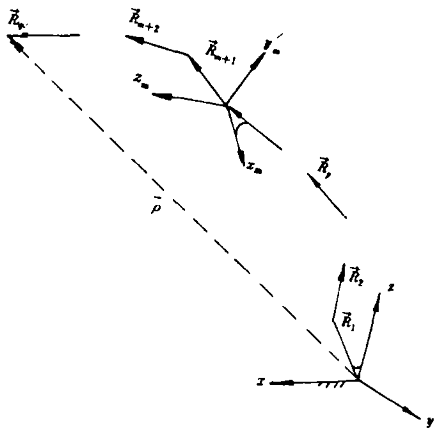

图2 开链类复向量系统

5 开链类复向量矩阵方程

也有一些工程问题，例如机器人、机械手、步行机等运动计算，可抽象成图2所示的开链类复向量系统。

为了形成假想的闭链类复向量系统，所以从首类复向量 $\vec{R}$ 的起点至末类复向量 $\vec{R}_q$ 的终点引类复向量 $\vec{p}$，此时的类复向量矩阵方程为

$$\vec{p} = \sum_{p=1}^{m} R_p M_p \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} + \sum_{p=m+1}^{q} R_p M_{p(m)} M_d \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \tag{26}$$

(26)式中的 $\bar{p}$ 相当于(24)式里的 $\bar{R}_f$,其他符号的含义与(24)式相同。

如果开链很长,也可能需要加装两个相对参考系。这时(26)式还要复杂一些,但计算原理不外乎前上述及的那些内容。

利用(26)式或与之类似的公式,可以对机器人、机械手、步行机等进行运计[8,10,11]。

参 考 文 献

[1]C. H. 苏等著、上海交大译,《运动学和机构设计》,机械工业出版社,1983

[2]牧野洋著、胡茂松译,《自动机械机构学》,科学出版社,1980

[3]傅则绍主编,《机构设计学》,成都科学技术大学出版社,1988

[4]赵国文、安承业著,《凸轮几何学》,机械工业出版社,1989

[5]华大年、唐之伟主编,《机构的分析与综合》,纺织工业出版社,1985

[6]刘树武、陈瑞文,"某些空间连杆机构运动分析的新方法",机械工程学报.1982.2 期

[7]赵国文,类复向量导论,吉林职业师范学院学报,1992.1—2 期

[8]赵国文、吴丽娟,"机器人运动学的类复向量算法",机器人,1992,3 期

[9]赵国文,"空间连杆机构位移分析的类复向量算法",机械工程学报(终审通过,通知 1993 年 2 期发表)

[10]Chao Guowen, Similar Complex Vector Principle in Kinematic Analysis of Robot, 1992(ASME)Design Technical Conferences

[11]赵国文,"机器人运动学计算中的类复向量矩阵和基变换矩阵",吉林职业师范学院学报 1992.3—4 期

[12]王桂玲、赵国文,"类复向量在空间连杆机构运动分析上的应用",吉林职业师范学院学极,1992.3—4 期

[13]赵国文,"机器人运动学中的四元数矩阵和基变换矩阵",机器人(终审通过,已通知 1993 年 2 期发表)

[14]段秀敏,"可转位车刀几何角度的类复向量算法",吉林职业师范学院学报,1992,1—2 期

Similar Complex Vector Method in Engineering

Zhao Guowen

(*Mechanical Engineering Department Jilin Vocational College, Changchun* 130052)

Abstract

Firstly the theory of similar complex vector defined by author is described, then similar complex vector matrix and basis transformation matrix and equations of similar complex vector matrix for closed and opened chain are represented. Finally, examples using these equations in engineering calculations are shown in this paper.

Key words: Similar complex vector, Rotation of similar complex vector, Similar complex vector matrix