

煤堆体积检测仪精度分析

李集田

(中国科学院长春光学精密机械研究所, 长春 130022)

摘要 本文根据光学三角原理, 导出鉴别误差解析表达式, 并对不同高度梯形截面煤堆鉴别误差进行计算, 根据重积分梯形公式的余式和中心极限定理, 导出总体各截断误差密度分布函数服从正态分布, 最后给出对不同情况下估计误差的结论意见。

关键词: 光学三角法; 鉴别误差; 截断误差

1 引言

煤堆体积检测系统的工作原理和组成在文献^[1]中已有详细报道, 它是根据光学三角法, 实现煤堆表面高度逐点测量, 并用数值积分计算煤堆体积的。它由机械扫描系统; 激光器和 CCD 摄像机组成的光电探测系统和由微机及相关电子学部分组成的运行控制、数据采集及数据处理系统组成。它具有实时显示测量高度, 单行体积、运行趟数, 以及打印输出测量结果, 及煤堆三维图像显示功能。实际运行应用表明, 该检测系统的测量精度达到 1%。

然而, 作为检测仪器, 分析误差来源, 不断改进测量精度是至关重要的。本文就受 CCD 有限象元限制的鉴别误差和积分计算的截断误差进行分析。

2 光学三角与鉴别误差

图 1 绘出煤堆体积检测系统光学三角结构原理图, 设 CCD 摄像机物镜主平面距地面高度 h_0 , 激光器与摄像机水平距离 d , 测量的最大高度 $(0 \sim h_0)h_0$, 物镜焦距 f , 则有主要光学参数^[2]

$$W_1 = \tan^{-1} \frac{d}{h_0 - h_b}; W_2 = \tan^{-1} \frac{d}{h_0}$$

视场角

$$W = W_1 - W_2 \quad (1)$$

激光束与光轴夹角

$$W_0 = W_1 + W/2 \quad (2)$$

激光束与光轴交点高度

$$h_p = h_0 - \frac{d}{\tan W_0} \quad (3)$$

p 点的物距、像距

$$u_p = \frac{d}{\sin W_0} \quad (4)$$

$$v_p = \frac{f u_p}{u_p - f} \quad (5)$$

像的横向放大率

$$\beta_p = v_p / u_p$$

像面(CCD)与光轴夹角

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\tan W_0}{\beta_p} \right) \quad (6)$$

设 p 点在线阵 CCD 上第 n_p 象元上成像, 任意高度在 CCD 上第 n 象元上成像, 如果相邻象元间距为 $14\mu\text{m}$, 则该象点相对 p 点位移

$$s = 14(n - n_p) \times 10^{-6} \quad (7)$$

$$v = v_p + \cos \alpha \cdot s \quad (8)$$

$$u = \frac{f \cdot v}{v - f} \quad (9)$$

$$h = h_p + \frac{u_p - u}{\cos W_0} \quad (10)$$

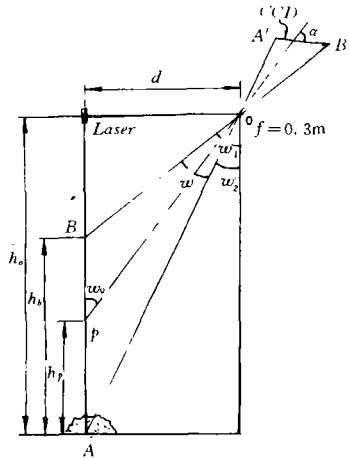


图 1

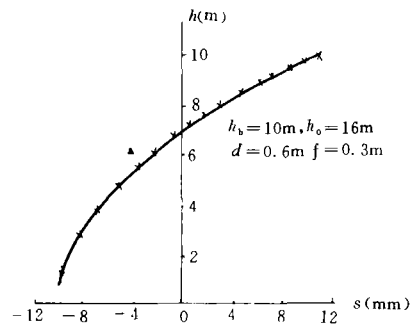


图 2

由(7)~(10)式看出, 高度 h 是象点在 CCD 上位移 s 的函数, 图 2 给出 $h=f(s)$ 曲线。

为评估该检测系统的测量精度, 首先对其最大鉴别误差——分辨力进行分析^[3]。所谓分辨力即引起仪器示值可见变化的被测最小变化量, 该测量仪是靠 CCD 进行探测的, 仪器示值最小变化单元为一个象元, 其位移 $s=14\mu$, 为求出该仪器的分辨力, 即要求出在 CCD 上位移一个象元, 对应的高度变化, 为此要求出 $\frac{dh}{ds}$ 。由(9)、(10)

$$h = h_p + \frac{u_p - f v / (v - f)}{\cos W_0} \quad (11)$$

则有
$$\frac{dh}{ds} = \frac{dh}{dv} \cdot \frac{dv}{ds}$$

其中
$$\frac{dh}{dv} = \frac{1}{\cos W_0} \cdot \left(\frac{f}{v-f}\right)^2$$

$$\frac{dv}{ds} = \cos \alpha$$

于是
$$\frac{dh}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\cos W_0} \cdot \left(\frac{f}{v-f}\right)^2 \quad (12)$$

将(11)式代入

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\cos W_0} \left[\frac{u_p - (h - h_p) \cos W_0 - f}{f} \right]^2 \quad (13)$$

(13)式,就是该测量仪的分辨力函数,可看出,分辨力 $\frac{dh}{ds}$ 是 h 的函数,且随 h 的增加而减小,即随 h 的增加,分辨力增加(习惯上也称灵敏度),且当 $h=0$ (地面)时, $\frac{dh}{ds}$ 有最大值,分辨力最低:

$$\left. \frac{dh}{ds} \right|_{h=0} = \frac{dh}{ds_{max}} = \frac{\cos \alpha}{\cos W_0} \left[\frac{u_p + h_p \cos W_0 - f}{f} \right]^2 \quad (14)$$

当 $h=h_b$ (最高点)时, $\frac{dh}{ds}$ 有最小值,分辨力最高:

$$\left. \frac{dh}{ds} \right|_{h=h_b} = \frac{dh}{ds_{min}} = \frac{\cos \alpha}{\cos W_0} \left[\frac{u_p - (h_b - h_p) \cos W_0 - f}{f} \right]^2 \quad (15)$$

当 $h=h_p$ (交点)时:

$$\left. \frac{dh}{ds} \right|_{h=h_p} = \frac{\cos \alpha}{\cos W_0} \left(\frac{u_p}{f} - 1\right)^2 \quad (16)$$

如前所述,如以象点在 CCD 位移一个象元,对应高度变化 Δh ,定义该测量仪的分辨力,则有

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{dh}{ds} \cdot 14 \times 10^{-6} \\ &= \frac{\cos \alpha}{\cos W_0} \left[\frac{u_p - (h - h_p) \cos W_0}{f} - 1 \right]^2 \cdot 14 \times 10^{-6} (\text{m}) \end{aligned} \quad (17)$$

图 3 给出,当 $h_0=16\text{m}$, $h_b=10\text{m}$, $d=0.6\text{m}$, $f=0.3\text{m}$ 时,(17)式的计算结果。计算结果表明,不同高度,其分辨力是不同的。

在靠近地面处($h=0$),仅能分辨高度 1.76cm;而在最高点($h=h_b$)处,分辨力则为 2.3mm,可见该仪器测量精度受最低点分辨力的限制。考虑到实际测量时,由于机械振动、象点光强分布形状等因素的影响,对同一高度的测量,象点在 CCD 上的位置将产生相对位置漂移 ± 2 象元,使仪器最大鉴别误差加倍,分辨力下降,如图 3 虚线所示。

在实际测量中,其测量精度因高度不同而异,因此用本仪器对(0~10)m 范围内变化的高度进行测量时,是一种非等精度测量,对不同高度测量值的可信度也是不同的,其标准差为:

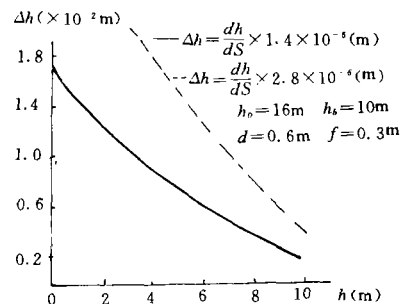


图 3

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n W_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n W_i}} \quad (18)$$

当我们考察单行测量时, W_i 一权取决于某一高度的个数, $x_i - \bar{x}$ 离差与最大鉴别误差对应, 对于煤高 10m, 两侧斜坡为 64° , 底宽 50m 的梯形截面, 单行测量 100 点, $\sigma_1 = 1.03\text{cm}$; 当高为 5m, 同样梯形截面, 则 $\sigma_1 = 1.78\text{cm}$, 这就是说, 对于前者, 该测量仪可鉴别 103m^3 (煤场 $50 \times 200\text{m}^2$), 而对于后者, 可鉴别 178m^3 . 图 4 给出不同高度煤堆梯形截面对应的高度鉴别误差的均方误差曲线, 图中 σ_1 值乘以整个煤场面积, 就可得到相应梯形截面煤堆的体积鉴别误差。

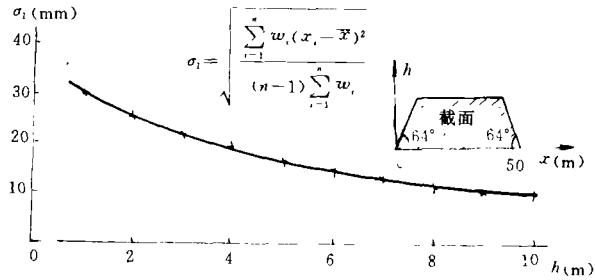


图 4

3 截断误差

对于不规则形状的煤堆体积有

$$V = \iint h(x, y) dx dy$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

式中高度 $h(x, y)$ 是 x, y 的函数, i 和 j 分别为 x, y 方向上等分节点, 总体积为 $m \cdot n$ 个小体积 V_{ij} 和, 式中 V_{ij} , 采用重积分梯表公式⁽⁴⁾:

$$V_{ij} = V_p + R \quad (19)$$

$$V_p = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{4} [h_{00} + h_{01} + h_{10} + h_{11}] \quad (20)$$

$$R = -\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{12} [\Delta x^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi_1, \eta_1) + \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(\xi_2, \eta_2)] \quad (21)$$

上式中, V_p 即为重积分的梯形公式, $\Delta x, \Delta y$ 分别为 x, y 方向节距, h_{00}, h_{01}, h_{10} 和 h_{11} 分别为小体积 V_p 四角高度; R 为用梯形公式计算体积产生的截断误差。由 (21) 式看出, 截断误差的大小和符号取决于 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$; 当 $\Delta x = 0.5\text{m}, \Delta y = 4\text{m}$ 时 $\Delta y^2 \gg \Delta x^2$, 则 (21) 式中第一项可忽略不计, 有:

$$R \approx \Delta v_k = \frac{\Delta x \cdot \Delta y^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \quad (22)$$

由于煤堆表面形状是千变万化的, 其二阶导数是随机变量, 因而 Δv_k 也是一个随机变量。但根据煤堆表面实际情况, 设表面在 y 方向上, 相邻两点 ($\Delta y = 4\text{m}$) 的坡度有 $\pm 60^\circ$ 的变化, 则有

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{2 \times 1.732}{4} = 0.866$$

$$\Delta V_k = \pm \frac{0.5 \times 4^3}{12} \times 0.866 = \pm 2.31(\text{m}^3)$$

设随机变量 $x_k = \Delta V_k (K=1, 2, 3 \dots n)$ 在区间 $[-2.31, +2.31]$ 内服从均匀分布 ($a = -2.31, b = 2.31$)⁽⁵⁾;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{4.62} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (23)$$

数字期望 $E(x) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = 0 = \mu$ (24)

方差 $D(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - 0$$

$$= b^2 = 5.34 = \sigma_2^2 \quad (25)$$

根据同分布中心极限定理, 变量

$$y_n = \frac{\sum_{k=1}^n x_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma_2} \quad (26)$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对任意 x , 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^n x_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma_2} \leq x \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (27)$$

即不管随机变量 x_k , 怎样分布, 其和 $\sum_{k=1}^n x_k$, 当 n 很大时, 都近似服从正态分布, 而 $\sum_{k=1}^n x_k$ 在本文中正是全部煤堆的总截断误差 ΔV 。如前所述, 整个煤场分成 $n=5000$ 个小体积, 代入(26)式

$$y_n = \frac{\sum_{k=1}^{5000} x_k - 5000\mu}{\sqrt{5000 \times 5.34}} = \frac{\Delta V}{163.4}$$

整个体积截断误差密度分布函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (28)$$

$$\sigma = 163.4$$

当 $|\Delta V| \leq 2\sigma$, 即 $\Delta V = \pm 2\sigma = \pm 326.8 (m^3)$ 时, 出现的概率为:

$$P\{-2\sigma < \Delta V \leq +2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \int_{-\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 0.9545$$

即绝大多数误差均小于 $326.8 m^3$, 超出该值误差概率仅为 4.6%, 下表 1 给出不同误差限的概率。

表 1

| 误差限 | $ \Delta V \leq 0$ | $ \Delta V \leq 0.32\sigma$ | $ \Delta V \leq 0.67\sigma$ | $ \Delta V \leq 1.15\sigma$ | $ \Delta V \leq 2\sigma$ |
|---------------------------|---------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| $ \Delta V (\text{m}^3)$ | 0 | ± 52.3 | ± 109.5 | ± 187.9 | ± 326.8 |
| 概率 | 0 | 25% | 50% | 75% | 95% |

4 结 论

综上所述,影响本仪器测量精度的主要因素是鉴别误差(分辨力)和截断误差,它们分别来源于 CCD 有限象元和体积近似计算。鉴别误差主要依赖于被测煤堆高度,而截断误差则依赖于煤堆表面形状。根据煤堆不同情况,对其误差可做如下估计:

- (1)煤堆较低($h \leq 2\text{m}$),主要误差为鉴别误差;
- (2)煤堆较高($h \geq 5\text{m}$),主要误差为截断误差;
- (3)煤堆表面平坦,主要误差为鉴别误差;
- (4)煤堆较低、表面起伏较大,总误差最大, $\Delta V \approx 500\text{m}^3$;
- (5)煤堆较高、表面平坦,总误差最小, $\Delta V \leq 200\text{m}^3$;
- (6)鉴别误差可由图 4 曲线进行估算;截断误差可由表 1 查得概率进行估算。

参 考 文 献

- [1] 李集田等,一种大面积煤堆体积自动检测系统.光学机械,1991,(5):39
- [2] 李集田,煤堆体积检测系统三角成像特性.光学机械,1992,(6):1
- [3] 毛英泰,《误差理论与精度分析》.国防工业出版社,1982
- [4] 徐萃薇,《计算方法引论》.高等教育出版社,1988
- [5] 浙江大学数学系高等数学教研组,《概率论与数理统计》.高等教育出版社,1987

Precision Analyses of the Instrument for Volume Measurement of Coal Heap

Li Jitian

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 13002)

Abstract

On the basis of optical triangulation theory, the analytical formulas of discernment error are derived, and the discernment error for trapezoid cross-section of coal heap with different height are calculated. According to the residue of formulas for double trapezoid integral and central limit theorem, the distribution function which are in accord with Gauss for discernment errors of total volumes are derived. Finally, some conclusions about error estimating for a series of cases are presented

Key words: Optical triangulation, Discernment error, Residual error