

# 用于煤堆检测仪中的激光三角

李集田

(中国科学院长春光学精密机械研究所, 长春 130021)

**摘要** 根据光学原理和煤堆检测仪的具体条件, 导出用于该仪器的三角法物像方程、三角结构方程和分辨率方程, 并对这些方程与三角结构参量的关系进行分析, 给出关系曲线图。

**关键词:** 激光三角; 光学测量; 分辨率

## 1 引言

根据 Scheimpflug 条件, 当物面和光轴倾斜时, 可以得到一个与之共轭的和光轴也是倾斜的像面, 其物点在物面上的位移与像点在像面上的位移关系如下<sup>[1]</sup>:

$$h = \frac{u \cdot S \cdot \sin\varphi}{\sin\alpha(v + S \cdot \cos\varphi + S \cdot \sin\alpha \cdot \text{ctg}\alpha)} \quad (1)$$

文献<sup>[2]</sup>献给出另一形式:

$$h = \frac{u \cdot S \cdot \sin\varphi}{v \sin\alpha + S \cdot \sin(\alpha + \varphi)} \quad (2)$$

显然 (1) 和 (2) 是完全一样的。式中  $h$  和  $S$  分别为物面和像面位移;  $u$  和  $U$  分别为轴上点物距和像距;  $\alpha$  和  $\varphi$  分别为物面和像面与光轴夹角, 且

$$\text{tg}\varphi = \text{tg}\alpha/\beta = \frac{u-f}{f}\text{tg}\alpha \quad (3)$$

式中  $f$  为物镜焦距,  $\beta$  为角放大率。

利用 (1) 式关系, 以激光器光束照射物体表面, 以 CCD 摄像机作传感器探测像点位移  $S$ , 可测量物体表面高度变化, 组成各种激光三角探测头, 用以实现物体表面粗糙度的在线测量和非接触式测厚<sup>[3]</sup>; 本文所述的煤堆检测仪<sup>[4]</sup>, 是以 He-Ne 激光器作光源, 垂直照射煤堆表面, 以线阵 CCD 摄像机作传感器进行像点位移探测, 计算出若干个小体积的高度, 再积分计算出整个煤堆体积的自动体积检测系统。就其三角结构而言, 其特点是测量范围大 (10m), 因而探测系统距被测物体 (煤堆) 表面距离远, 因此光轴与倾斜物面 (激光束) 夹角  $\alpha$  很小。

(1) 和 (2) 式虽然给出物、像位移的关系, 但它不能直观地看出这些量与三角参量的关系, 本文根据用于煤堆检测仪中的三角结构特点, 就其三角成像特性方程进行推导和分析。

## 2 三角物像方程

图 1 给出用于煤堆检测仪光学三角原理图。激光束垂直向下照射，地面 A 点  $h = 0$ ；摄像机主平面距地面为  $h_0$ 。测量最大高度  $h_b$ ；激光束与物镜水平距离  $l$ ，与光轴夹角  $\alpha$ ，于是当  $l \cdot \alpha$  确定之后，其基本三角关系测已确定，根据几何关系则有：

$$u_p = \frac{l}{\sin \alpha} \tag{4}$$

$$h_p = h_0 - \frac{l}{\tan \alpha} \tag{5}$$

$$u_A = u_p + h_p \cos \alpha \tag{6}$$

$$v_A = \frac{u_A \cdot f}{u_A - f} \tag{7}$$

$$\tan \varphi = \frac{u_p - f}{f} \cdot \tan \alpha \tag{8}$$

当以地面 A 点 ( $h = 0$ ) 为高度基准时，则 A 点在 CCD 上的像 A' 位置 (像元数)  $n_A$ ，则为计算像点位移  $s$  的基准。于是，对应任意高度在 CCD 上成像于第  $n$  个像元，且设相邻像元间距为  $14\mu$ ，那么，像面上位移

$$S = (n - n_A) \cdot 14 \times 10^{-6} \tag{9}$$

该点对应的像距、物距分别为

$$v = v_A + S \cdot \cos \varphi \tag{10}$$

$$u = \frac{v \cdot f}{v - f} \tag{11}$$

对应高度

$$h = \frac{u_A - u}{\cos \alpha} \tag{12}$$

从 (12) 式出发，根据三角关系具体条件，可导出  $h = F(s)$  与三角参量的关系式。由 (11)、(10) 和 (7)，有

$$\begin{aligned} u &= \frac{v \cdot f}{v - f} = \frac{f(v_A + S \cdot \cos \varphi)}{v_A + S \cdot \cos \varphi - f} \\ &= \frac{f\left(\frac{u_A \cdot f}{u_A - f} + S \cdot \cos \varphi\right)}{\frac{u_A \cdot f}{u_A - f} + S \cdot \cos \varphi} \\ &= \frac{u_A \cdot f^2 + Su_A \cdot f \cos \varphi - Sf^2 \cdot \cos \varphi}{u_A S \cdot \cos \varphi - Sf \cos \varphi + f^2} \end{aligned} \tag{13}$$

代入 (12)

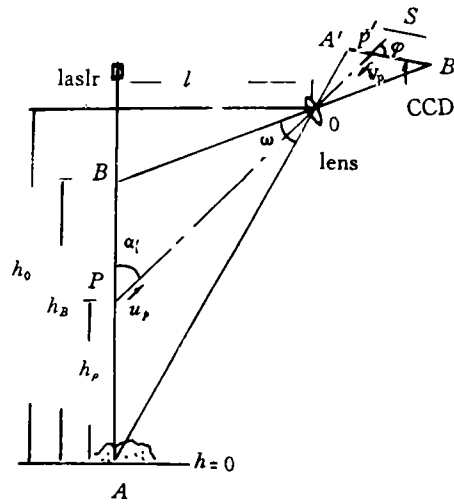


图 1 光学三角原理图

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{u_A(u_A S \cos\varphi - S f \cos\varphi + f^2) - (u_A f^2 + u_A S f \cos\varphi - S f^2 \cos\varphi)}{u_A S \cos\varphi - S f \cos\varphi + f^2} \\
 &= \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{u_A^2 \cdot S \cdot \cos\varphi - 2u_A S f \cos\varphi + S f^2 \cos\varphi}{\cos\varphi [u_A \cdot S - S f + f^2 \frac{1}{\cos\varphi}]} \\
 &= \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{S(u_A - f)^2}{S(u_A - f) + f^2 \frac{1}{\cos\varphi}} \quad (14)
 \end{aligned}$$

式中  $u_A$  为最低点  $A(h=0)$  的物距, 由 (6) 式

$$\begin{aligned}
 u_A &= u_P + \cos\alpha \cdot h_P \\
 &= u_P + \cos\alpha(h_0 - \cos\alpha \cdot u_P) \\
 &= u_P(1 - \cos^2\alpha) + \cos\alpha \cdot h_0 \\
 &= \frac{l}{\sin\alpha} \cdot \sin^2\alpha + h_0 \cos\alpha \\
 &= l \cdot \sin\alpha + h_0 \cdot \cos\alpha \\
 &\approx h_0 \quad (\text{当 } \alpha \text{ 很小时}) \quad (15)
 \end{aligned}$$

(14) 中的

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos\varphi} &= \sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi} \quad , \text{而} \\
 \text{tg}\varphi &= \text{tg}\alpha \cdot \frac{u_P - f}{l f} = \text{tg}\alpha \left( \frac{u_P}{f} - 1 \right) \\
 &= \text{tg}\alpha \left( \frac{l}{\sin\alpha \cdot f} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\cos\alpha} \left( \frac{l}{f} - \sin\alpha \right) \\
 &\approx \frac{l}{f} \quad (\text{当 } \alpha \text{ 很小时}) \quad (16)
 \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{l}{f}\right)^2} = \frac{1}{f} \sqrt{f^2 + l^2} \quad (17)$$

将 (15)、(17) 代入 (14)

$$h = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{S(h_0 - f)^2}{S(h_0 - f) + f \sqrt{f^2 + l^2}} \quad (18)$$

(18) 式则为用于煤堆检测仪光学三角物、像关系表达式。其物、像关系式是以三角结构参数  $h_0$ 、 $l$  和  $\alpha$  以及物镜焦距为参量的, 其中  $l$ 、 $\alpha$  确定之后, 则确定了三角结构; 选定  $f$ 、 $h_0$  后, 高度  $h$  和像点位移则唯一确定, 当  $\alpha$  很小时,

$$h \approx \frac{S(h_0 - f)^2}{S(h_0 - f) + f \sqrt{f^2 + l^2}} \quad (19)$$

从上式看出, 当  $\alpha$  很小时,  $h = F(s)$  关系与  $\alpha$  无关;  $h$  随  $f$ 、 $l$  的增大而急剧增加, 图 2 给出物、像关系曲线。

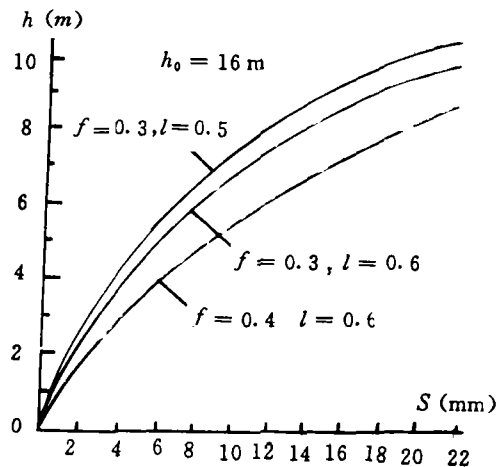


图 2 物像关系曲线

### 3 三角结构方程

由图 1 几何关系, 视场角

$$\text{tg}\omega \approx \frac{h_B \cdot l}{h_0(h_0 - h_B)} \quad (20)$$

激光束与光轴夹角

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{l}{h_0} + \omega/2 \quad (21)$$

上式中  $h_0, h_B$  均为测量参数, 是视场测量条件给定的; 而  $l$  则要根据空间尺寸和三角关系来确定。为此, 从 (19) 出发, 当  $h = h_B$  时, 为最大测量范围, 这时  $S = S_0$  为线阵 CCD 工作长度, 则有

$$S_0 = \frac{h_B \cdot f \cdot \sqrt{f^2 + l^2}}{(h_0 - f)^2 - h_B(h_0 - f)} \quad (22)$$

当  $f \ll h_0$  时

$$S_0 \approx \frac{h_B \cdot f \cdot \sqrt{f^2 + l^2}}{h_0(h_0 - h_B)}$$

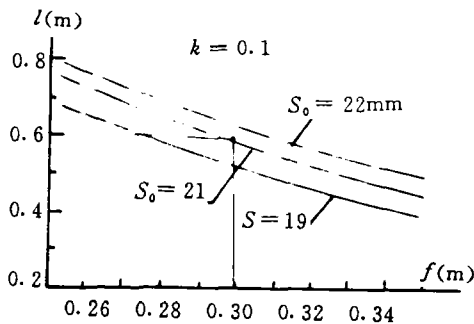
$$= K \cdot f \sqrt{f^2 + l^2} \quad (23-a)$$

$$K = \frac{h_B}{h_0(h_0 - h_B)} = \frac{\text{tg}\omega}{l} \quad (23-b)$$

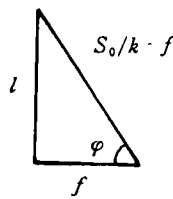
或把 (23-a) 写成:

$$\left(\frac{S_0}{K \cdot f}\right)^2 = f^2 + l^2 \quad (24)$$

其中  $K$  为测量常数, 是事先给定的; 于是  $S_0$ 、 $f$  和  $l$  恰构成直角三角形勾股定理关系。斜边为  $S_0/K \cdot f$ , 直边为  $f$  和  $l$ , 且斜边与  $f$  夹角为像面与光轴夹角  $\varphi$ , (24) 式给出  $S_0$ 、 $f$  和  $l$  选取原则, 任意给定两个量, 第三量就唯一确定。显然当选定 CCD 工作长度之后, 较大的  $l$  对应较小的  $f$ , 反之亦然, 这与文献<sup>[4]</sup>的实验结果一致。当  $h_0 = 16\text{m}$ ,  $h_B = 10\text{m}$  时,  $K = 0.1$ ; 选  $f = 0.3\text{m}$ ,  $l = 0.6\text{m}$ , CCD 工作长度  $S_0 = 21\text{mm}$ , 于是选 2048 阵列 CCD



(a)



(b)

图 3  $S_0$ 、 $f$  和  $l$  的关系曲线

可满足应用, 图 3 给出  $S_0$ 、 $f$  和  $l$  的关曲线, 和它的直角三角形, 这时  $\alpha = 4^\circ$ ;  $\varphi = 62.7^\circ$ ,  $\omega = 3.6^\circ$ 。

### 4 分辨率方程

文献<sup>[2]</sup>由 (2) 式求  $\frac{\alpha h}{ds}$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{u_p \cdot v_p \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha}{[v_p \sin\alpha + S \cdot \sin(\varphi + \alpha)]^2} \quad (25)$$

上式给出  $h = F(s)$  曲线变化率。然而并不能从 (25) 式中看出曲线斜率与光学三角结构参数的关系，人们尤其感兴趣的是，该曲线斜率随测量高度  $h$  的变化关系，它直接影响仪器测量精度<sup>[5]</sup>。为此，由 (19) 式求：

$$\frac{dh}{dS} = \frac{(h_0 - f)^2 \cdot f \sqrt{f^2 + l^2}}{[S(h_0 - f) + f \sqrt{f^2 + l^2}]^2} \quad (26)$$

(26) 式为含有像方位移变量  $S$  的曲线斜率；现在利用 (19) 式变 (26) 式为含物方位移变量  $h$  的表达式。其中

$$S(h_0 - f) = \frac{h \cdot f \sqrt{f^2 + l^2}}{h_0 - f - h}$$

代入 (26)

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dS} &= \frac{(h_0 - f)^2 \cdot f \sqrt{f^2 + l^2}}{[f \sqrt{f^2 + l^2} \cdot \frac{h - f}{h_0 - f - h}]^2} \\ &= \frac{(h_0 - f - h)^2}{f \sqrt{f^2 + l^2}} \end{aligned} \quad (27)$$

由 (27) 式可看出曲线斜率随高度  $h$  的增加而变小，当  $h = h_0 - f$  时  $\frac{dh}{dS} = 0$ ，这是该仪器测量最大高度的理论极限；当  $h = 0$  (地面) 时，有最大值，

$$\left. \frac{dh}{dS} \right|_{h=0} = \left( \frac{dh}{dS} \right)_{max} = \frac{(h_0 - f)^2}{f \sqrt{f^2 + l^2}}$$

这时分辨率最低，当  $h = h_B$  时，有最小值，

$$\left. \frac{dh}{dS} \right|_{h=h_B} = \left( \frac{dh}{dS} \right)_{min} = \frac{(h_0 - f - h_B)^2}{f \sqrt{f^2 + l^2}}$$

这时有最高分辨率，显然，曲线斜率随参量  $f$ 、 $l$  增大而变小 (即分辨率提高)。然而探测系统的实际分辨率，并非由 (27) 式决定，而是受 CCD 阵列有限尺寸的限制。设 CCD 相邻像元间距为  $14\mu$ ，那么相对一个像元所对应的高度变化  $\Delta h$ ，才是仪器的实际分辨率：

$$\Delta h = \frac{dh}{dS} \cdot 14 \times 10^{-6}$$

图 4 给出不同的  $f$ 、 $l$  时分辨率随高度  $h$  的变化关系。

## 5 结 束 语

本文导出三个方程，均以三角结构参数

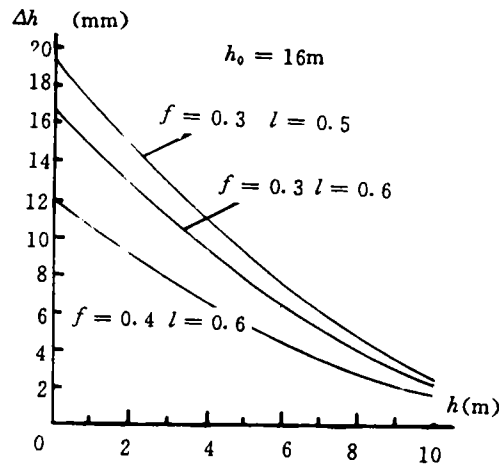


图 4 分辨率随高度  $h$  的变化关系

$h_0, h_B, l$  和  $f$  为参变量, 集中反应该三角成像特性与三角结构的关系, 这比文献<sup>[2]</sup>给出的关系式更直观, 有利于设计者对参量的选取和对成像特性的分析。从导出的三个方程可以明显地看出, 影响激光三角成像特性的主要因素, 是  $h_0, h_B, l$  和  $f$ , 而与  $\alpha$  角 (几乎) 无关; 尽管上述方程的推导是根据煤堆检测仪的特定条件进行一定的简化 ( $\alpha$  很小), 但这些方程在任何采用激光三角法进行大范围 ( $h_B > l$ ) 测量系统中, 仍有普遍指导意义。

#### 参 考 文 献

- [1] Б. Н. 别戈诺夫, 光学系统理论. 机械工业出版社, 1986
- [2] 唐朝伟等, 曲面形状测量中二维激光测量头的设计. 光学精密工程, 1993, 1 (2): 63-69
- [3] 叶培德, 激光与红外, 1991, 21 (4): 35
- [4] 李集田, 激光体积检测系统三角成像特性. 光学机械, 1992, (6): 1-5
- [5] 李集田, 煤堆体积检测仪精度分析. 光学精密工程, 1993. 1 (6): 11-16

### Laser Triangulation for Measuring Instrument of Coal Heaps

Li Jitian

(Changchun Institute of Optics and fine Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130021)

#### Abstract

On the basis of optical principle and specific condition of the measuring instrument of coal heaps, the object-image formula, the triangular structure formula and resolution formula in the laser triangulation for the instrument are derived, Relations of these formulas with parameters of triangular structure are analysed and the curves of these formulas are given.

**Key Words:** Laser triangulation, Optical measurement, Resolution