

用有限单元法(FEA)进行工程分析 误差评价与控制

卢 镔 吴清文 牛晓明

(中国科学院长春光学精密机械研究所, 长春130022)

摘要 针对有限单元法在工程分析中如何评价建模误差及误差控制的问题进行了讨论。

关键词: 有限单元法; 误差评价

1 引 言

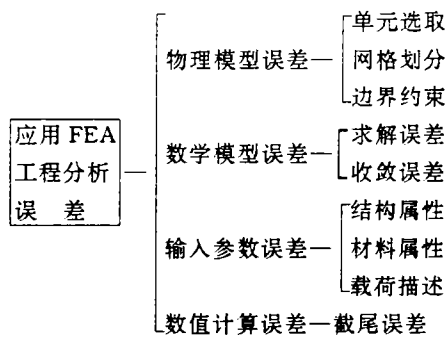
在传统工程或产品研制开发过程中,往往要等到后期样机加工出来后,经过实际测试才发现原设计中存在的一些问题,修改设计再下图加工,重新安装调试直至完善为止,这是一个漫长而又浪费的开发过程。市场激烈的竞争要求产品上市的响应速度要快,性能/价格比要高的特点向传统的开发作业模式提出了越来越尖锐的挑战。为了增强市场竞争的能力,人们迫切要求改变落后的产品研制与开发的方式,期待着能在设计的早期阶段就能及早地看到待开发的产品或工程项目的“样机”,预测其在未来工作环境下性能指标是否满足要求。CAD/CAE 技术正是通过“屏幕样机”构造和工程分析手段实现了人们多年的梦想:利用电子信息处理手段加速产品研制开发中设计—分析迭代的进程,从而极大地缩短产品研制开发的周期,提高产品的质量。这一巨大的变革,引起了工业界广泛的关注。当人们看到用 CAD 手段构造的“屏幕样机”如此逼真而又如此之快地“加工”出来,往往为之欢欣鼓舞;然而当对“屏幕样机”进行工程分析时,特别是分析计算结果不符合要求,违反初衷时,总不免要问上一句:“分析计算的对吗?”,就连从事 CAE 的技术人员有时也感到心里没底儿。分析计算,特别是用 FEA 进行分析计算的精度到底是多少?怎样才能提高分析计算的精度?围绕这一问题,特别是如何评价和控制由于采用 FEA 进行工程分析所带来的误差,是能否发挥 CAD/CAE 效能的一个不容忽视的问题。

2 FEA 误差分类及评价

作为工程分析的重要手段,FEA 已成为机械 CAE 软件中必不可少的组成部分,有的 FEA 程序作为标准的工程分析程序在世界范围被广泛的应用,例如,NASTRAN, PATRAN, ANSYS 等程序就是如此。

FEA 是基于在虚功原理的基础上建立以虚位移为变元的泛函并通过变分导出诸如结构体力一位移关系等控制方程。正是由于 FEA 有着坚实的数学、物理等理论基础,才使其得到广泛的应用。FEA 在实际工程分析中的应用是通过对连续体进行物理离散(划分成单元)和数学离散(单元位移函数分片插值),然后再进行系统组装,联立求解来实现。因此用 FEA 进行工程分析的误差主要来自物理建模及其数学表达,此外还有输入参数误差及数值计算误差。表1所示为用 FEA 进行工程分析误差来源及其分类:

表1 应用 FEA 工程分析误差



(1)物理模型误差

主要指 FEA 物理模型逼近真实结构的程度。FEA 的物理模型是根据实际设计结构形状特点、材料类型、载荷形式、边界条件、分析计算类型、精度要求以及计算机占用的空间、机时、费用等诸多因素综合考虑、权衡进行建模。物理模型误差主要来自以下三个环节:单元选取、网格划分及边界处理。

①单元选取。在用有限单元法构造物理模型时,除了要保持单元形状与实际结构相吻合外,还必须考虑工程分析的问题类型、载荷形式、选用材料及边界约束条件等因素,并从 FEA 程序单元库中选择能提供相应功能的单元。错误地选择单元,必将导致错误的结果。例如,对一承受法向压力的平板,如若选取平板单元(平面应力单元)构造 FEA 模型,则会为因忽略板的弯曲作用而导致结果错误;又如,对一承受横向载荷的简支实心梁或悬臂实心梁,当梁的横向与纵向尺寸比大于 $\frac{1}{5}$ 时,就应考虑采用实体单元构筑 FEA 模型,否则直接用梁单元建模将会由于忽略剪切力的作用而使计算结果误差过大;如若梁的材料为塑料,则还须考虑所选择单元是否提供材料非线性的计算功能。由单元选取不当所带来的误差很难笼统估算,只能视具体情况而定。

②网格划分。在构造 FEA 物理模型时,网格划分的疏密程度将直接影响计算的收敛误差和求解误差。这里所指的收敛误差是以相邻二次网格划分所得计算结果差与前次网格划分计

算结果的百分比。即，

$$\text{收敛误差: } \delta_i = \left\| \frac{\varphi(u)_i - \varphi(u)_{i-1}}{\varphi(u)_{i-1}} \right\| \times 100\% \quad i = 2, 3, \dots, n$$

式中 δ_i ——第 i 次网格划分收敛误差

$\varphi(u)_i$ ——第 i 次网格划分的解

$\varphi(u)_{i-1}$ ——第 $i-1$ 次网格划分的解

求解误差: 当前网格划分模型计算结果与真实的连续体模型(可视为无限单元模型)计算结果的差。事实上真实的连续体模型的数学表达式几乎无法建立(除非构件的形状、边界条件都非常简单),真实的精确解无法知道。FEA 计算结果只是一个近似解,其求解误差只能通过改善解的收敛状况逐渐减小,当其趋于零时,FEA 模型的解就逼近精确解。见图1。

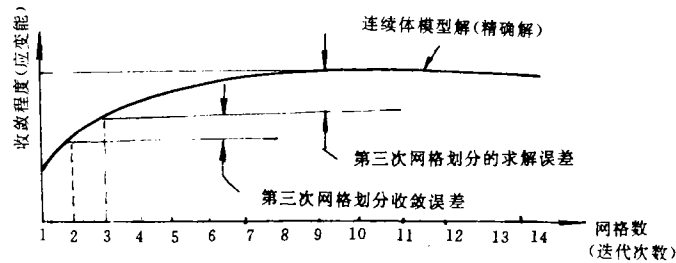


图1 FEA 模型网格划分与误差

由图1可看出,收敛误差越小,越趋近精确解,其收敛曲线为一条渐近线。目前大多数 FEA 程序所提供的单元类型为 h 单元。 h 代表单元的尺寸, h 值越大则意味着单元尺寸越大,网格越疏,反之亦然。描述 h 单元的位移函数多为低阶多项式,一般为1~2阶,其相应的单元应力求解表达式则为低一阶的常数项或一次项。当网格划分较粗时, h 值偏大,则会出现整体结构应力梯度不明显的现象,特别是在结构中有应力集中的地方,甚至被忽漏掉。因此在有应力集中或关键部位处单元划分偏大则导致对应力集中不敏感,收敛精度差,求解误差大。为了提高求解精度,就应不断地减少收敛误差。实践表明,在 FEA 建模时,适当地增加网格的密度,有助于收敛误差的减小。图2为某光学系统主反射镜 FEA 模型网格划分比较图。由于反射镜结构为中心轴对称,当镜面朝上承受自重载荷时,载荷与边界约束亦都为轴对称,因此,FEA 建模可仅取一扇形条为研究对象进行网格划分。为探讨网格密度与收敛精度的关系,考核镜体自重载荷作用下镜面最大位移情况。表2所示为不同网格密度时计算镜面最大位移结果比较。

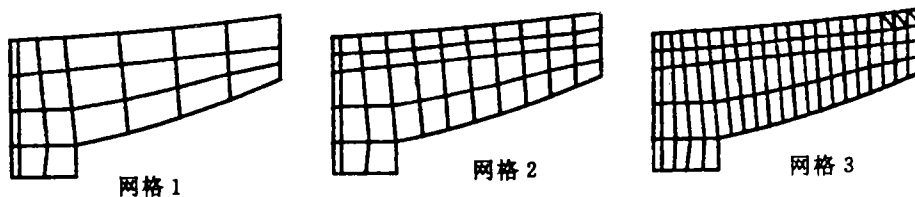


图2 镜体 FEA 模型网格划分比较

表2 不同网格划分时镜体自重变形结果比较

网格形式	单元数	镜面最大位移	收敛误差
网格1	24	-0.2258E-3	
网格2	47	-0.2460E-3	8.9%
网格3	96	-0.2548E-3	3.5%

显而易见,随着网格加密,收敛误差减小。为了减小收敛误差,提高求解精度,在建立 FEA 模型时应适当地增加网格密度。一般情况下,网格密度的增加以收敛误差小于5%时即可满足工程精度的要求为准。过密的网格划分也是不必要的,因为这将导致计算机求解机时增加,占有空间加大,而且当网格密到一定程度,再增加密度其收敛误差和求解误差由于已处于渐近线的饱和段而变化微乎其微了,见图1。合理的网格划分应该是疏密相结合,无关紧要的部位网格划疏些,要害部位、应力集中处应密些。

③边界约束。边界约束的处理直接影响计算结果的正确性和精度,尤其是当连接基础呈现弹性、弹塑性或塑性的情况时,往往由于难以确切地进行边界约束描述,给计算带来很大的误差。例如,当用胶体固定光学元件时,采用不同的胶体,不同的胶层厚度,不同的工作温度环境条件等等都给边界约束的描述和简化带来困难,使相应单元的选择和输入参数往往无所是从。由于边界约束处理不当带来的误差很难估计,最好的办法是与实测结果相比较,然后对相应的参数(如弹性模量,泊桑比等)加以修正。

(2)数学模型误差。

数学模型误差主要是由单元位移函数的多项式阶数偏低引起的。在相同网格密度情况下,单元尺寸相同,位移函数多项式阶数越高,相邻二次迭代间(即 n 阶与 $n-1$ 阶之间)收敛误差越小,相应求解精度也越高。如图3所示,单元阶数对精度的影响与数值积分精度情况十分相似。

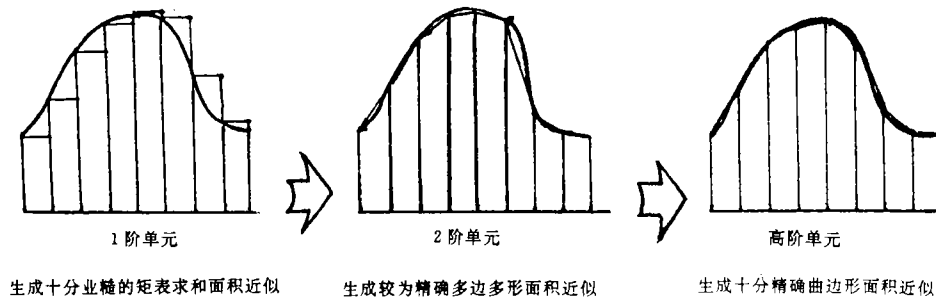


图3 单元阶数对精度影响示意图

目前开始引起人们关注的 P 单元(P 代表多项式)及几何单元正是基于增加单元多项式阶数的办法来提高其收敛精度与求解精度的。由于 P 单元不是靠改变单元尺寸大小来改善收敛精度,因此不用更动 FEA 物理模型就可改进求解精度,程序按着要求的收敛精度自动调整多项式的阶数直至满足要求为止。不仅如此,P 单元对尺寸大小及单元形状的要求均很宽松,单元的边长比可达30:1,夹角可为 $5^{\circ}\sim 175^{\circ}$,这些优点无疑给 FEA 物理模型的构造带来莫大的方便。

(3)输入参数误差主要由输入的参数数据与实际参数数据差产生。在用 FEA 进行工程分析时所输入的参数数据主要包括:结构属性描述,如系统的阻尼、集中质量等;材料属性描述,如弹性模量、泊松比、密度、线胀系数等等;载荷函数描述,如载荷大小、分布及随时向变化的函数表达式等。输入参数误差要结合具体分析计算题目来确定,有的是由于参数来源不可靠,也有的是由于分析计算人员提取或输入参数时粗心大意造成的。

(4)数值计算误差

数值计算误差主要是由计算机计算时所产生的截尾误差。由于目前工程分析计算多采用双精度,因此数值计算误差非常小,远远低于工程设计要求的误差限,一般忽略不计。

3 误差控制

为了提高工程分析的可靠性和精度,在用 FEA 建模时应加强误差的控制。主要从以下三方面入手:

①把好数据输入关——FEA 建模所要输入的数据务求正确,特别是材料参数、载荷描述参数的来源要可靠、正确。

②单元选择——确定所选用单元是 FEA 建模的基本出发点。正确地选择单元应考虑以下二点:

- 分析对象。包括实际结构形式,问题类型、载荷种类、约束方式及材料特点等因素;
- FEA 程序提供的单元种类、单元功能等。

③收敛误差控制——收敛误差控制可通过 h 收敛、 p 收敛以及 h 与 p 混合收敛等途径来实现。

h 收敛是基于降低单元尺寸(增加网格密度)达到控制收敛误差的目的。网格的调整可以在全局或局部进行。收敛误差判别可通过不同网格划分情况下计算应变能、应力或位移来比较收敛状况。 h 收敛需要人机结合进行。

p 收敛是基于增加单元多项式的阶数来达到误差控制的目的,阶数越高(目前的 p 单元可达9级),收敛精度越高。 p 单元收敛是自动进行的。

$h-p$ 混合收敛是本着粗精结合方式实现收敛误差的控制。FEA 模型中要求不高的地方采用 h 单元,要求高的地方采用 p 单元,同时进行 h 收敛及 p 收敛,如还不能满足收敛误差限的要求的话,则可通过降低 p 单元的尺寸实现进一步的收敛。

4 结束语

FEA 作为有效的工程分析技术手段,已广泛地应用于工业界各个领域。然而正象使用一台多功能的仪器一样,只有充分地了解它的性能、优点和局限性,才能更好地发挥它的效能。

运用 FEA 工程分析手段,一方面由于可在较短的时间内对“工程”或“产品”的可行性进行评价,进而实现优化设计,现已逐步成为产品研制开发并行工程中必不可少的一环;另一方面 FEA 作为一种数值计算方法,毕竟是一种近似,最终的实验验证及模型修正工作是必不可少的。只有经实验验证并修正后的模型才是可靠的模型。

为了更好地掌握 FEA 这一有效的工程分析手段,就应该了解其基本原理,熟悉必要的工程判断知识,不断地实践,并从中不断地总结经验,就会逐步由必然王国进入自由王国,使 FEA 工程分析手段发挥更大的作用!

参 考 文 献

- [1] Barna A. Szabo, Mesh Design For P-version of The Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **55**(86):181-197
- [2] Paul Kurowski, Machine Design, Avoiding Pitfalls in FEA 1994 Nov. **5**(7):78-86
- [3] Babuska, I. Szabo, The P-version of the FEM. *SIAM, J. Num, Anal*, 1981, **18**(3):515-545
- [4] Babuska, I. and Suri, M. , The P-and h-p Version of the FEM, an Overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 1990, **80**:5-26
- [5] Alan Austin, Improving Accuracy and Confidence with Adaptive P-version Element. No75 Report from Rasna Company, 1995
- [6] Chad D. Balch, Structural FE with High-order Basis Functions. No.11 Report from Rasna Corporation, 1991
- [7] R. King, C. Katsis and C. Balch, Structural Analysis, Design and Optimization with High-order Finite Elements. No.12 Report from Rasna Co. 1991

Engineering Analysis, Error Veluation and Control with FEM

Lu E, Wu Qingwen and Niu Xiaoming
(*Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,*
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

Abstract

It is described that how to assess the engineering analysis error caused by FEA modeling and the way of error control is also depicted in this paper.

Key words:FEM, Error evaluation