

# 有限元法与优化技术相结合的方法及应用

牛晓明 卢 鐸

(中国科学院长春光学精密机械研究所, 长春 130022)

**摘要** 讨论了工程分析中两大基本工具——有限元法与优化技术相结合用于空间光学仪器设计中的问题,并结合具体实例,论述了优化目标、状态变量等优化参数的选择及其显函数方程的建立,为工程设计提供了科学的依据。

**关键词:** 有限元法; 优化设计; 最小二乘法

## 1 前 言

对空间光学仪器进行工程分析的目的在于利用力学计算及计算机仿真等方法,对工程结构进行静力、动力、温度场等各种环境激励下响应的求解,从而发现结构在强度、刚度上存在的薄弱环节,探求改进结构的途径,最终达到优化设计的目的。工程设计一般为一个迭代的设计过程以获得最好的或优化的设计方案,最终的优化设计方案应当是在满足设计要求的同时,使某些参数具有最优值,如费用最低、重量最轻等。对于空间光学仪器来说,由于其工作环境较为特殊,使其受到诸如发射费用等条件的制约,其设计过程中的轻量化问题显得尤为突出,为此,利用 CAE 的基本手段——有限元法与优化技术并将二者有机地结合起来,在对结构进行工程分析得到可行设计方案的基础上,对其进行进一步的优化设计,从结构的形状优化到设计参数的优化选择<sup>[1]</sup>,通过这一过程,可以实现提高仪器动态刚度,满足技术指标及结构轻量化的目的。

## 2 优化原理与有限元法相结合

优化问题的基本原理是通过优化模型的建立,运用各种优化方法,通过在满足设计要求的条件下的迭代计算,求得目标函数的极值,得到最优设计方案。优化问题的数学模型可表示为:

$$\begin{aligned} \min F(X) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) & (1) \\ g_i(X) &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ h_j(X) &= h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p) \\ X &= [x_1, \dots, x_n]^T \end{aligned}$$

$F(X)$ 为目标函数,是设计变量的函数,用来评价设计方案的优劣,优化问题即为求目标函

数的极值,  $g_i(X)$ 、 $H_i(X)$  为约束条件, 是设计变量取值范围及状态变量空间范围的限制条件, 是设计变量的函数。  $X$  为设计向量, 由设计变量形成, 是设计中需优选的设计参数, 每个设计向量即为一个设计方案, 设计向量的集合为设计空间  $R$ , 满足约束条件的设计向量的集合为可行域。

求解优化问题的方法一般采用数值迭代法如罚函数法 (SUMT), 将约束优化问题转化为非约束优化问题, 通过迭代, 逼近目标函数极值。

有限元法与优化方法是工程分析中最主要的两个数学工具, 将二者有机地结合起来, 充分发挥有限元法数值计算的准确性及优化方法求极值的高效性, 将在工程分析中发挥巨大的威力。

由于传统优化方法求解的基本前提在于目标函数及状态变量的函数方程的建立, 而对于大型复杂结构的有限元模型来说, 要想得出目标函数及状态变量的解析表达式是十分困难甚至是不可能的, 为了将有限元法与优化方法结合起来, 则必须给出目标函数、状态变量函数的显函数表达式, 为了解决这一问题, 可以采用曲线拟合的方法, 人为地形成目标函数及状态变量的近似函数表达式, 目标函数与状态变量均可采用如下形式的拟合曲面方程<sup>[2]</sup>:

$$H = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

其中  $X_i (i=1, 2, \dots, n)$  为设计变量。

为了进行曲面拟合, 首先通过定义和随机生成的办法产生  $K$  组设计变量, 通过有限元法求出相应的各组目标函数及状态变量的计算结果, 为了较好地进行拟合,  $K$  的值应大于未知函数的系数的数目, 即  $K > 1/2(n+3)n+1$ 。由各组结果得出总的加权最小二乘误差为:

$$E^2 = \sum_{k=1}^K E_k^2 = \sum_{k=1}^K W^{(k)} (h^{(k)} - H^{(k)})^2 = S(a_0, a_1, \dots, C_{n-1, n}) \quad (3)$$

$K$  为设计变量的组数,  $h^{(k)}$  为由有限元法算出的第  $K$  组设计变量对应的  $H$  值,  $H^{(k)}$  为由近似算法得出的第  $K$  组设计变量下的  $H$  值,  $W^{(k)}$  为第  $K$  组设计变量的权, 其值可根据第  $K$  组设计变量与当前最小目标函数对应的设计变量的设计空间距离及目标函数值确定。

根据最小二乘原理, 求  $E^2$  的极小值, 得正则方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_i} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b_i} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_{ij}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

解此方程组可得  $a_i, b_i, c_{ij}$ , 由此可得拟合形式的目标函数及状态变量, 之后, 利用各种优化方法, 通过优化迭代, 可以得出目标函数的极值。

### 3 实例 1: 相机箱体的优化

某相机箱体的结构有限元模型图如图 1 所示。模型采用壳单元生成, 根据设计要求, 为了使结构轻量化, 在满足结构的可行性要求的前提下对箱体高度进行优化设计。

(1) 目标函数: 根据轻量化的目的, 选取箱体重量为优化目标, 考虑到计算方便, 在实际计

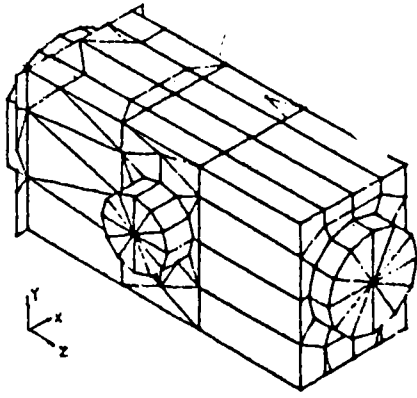


图1 相机箱体的有限元模型图

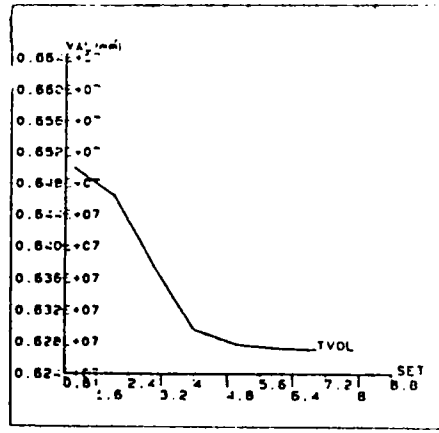


图2 目标函数优化曲线

算中采用箱体结构有限元模型的总体积 TVOL 为优化目标(体积与比重相乘可得重量)。

(2)状态变量:由于箱体高度的变化,必将使箱体两端面之间在箱体自重作用下的夹角发生变化,根据设计要求,这一变化应小于技术指标值,为此选取该夹角作为状态变量,其变化范围应在技术指标值之内。

(3)设计变量:根据要求,应选箱体高度作为设计变量,由于此处为结构的形状优化问题,而箱体高度  $H$  在 ANSYS 有限元分析前处理文件中并无直接反映,为此,可将模型的坐标系设为沿箱体的三个正交尺寸方向,而选取箱体顶面所有节点沿高度方向的坐标值为设计变量,这样可通过坐标的改变达到优化高度的目的。

经过七次优化迭代,得到收敛的结果,优化结果见表 1。目标函数 TVOL、状态变量 ANGL、设计变量 YZB 的优化曲线见图 2、图 3、图 4。由表 1 及图 2、图 3、图 4 可见,在满足技术要求的前提下箱体高度可明显减小,使结构得以轻量化。

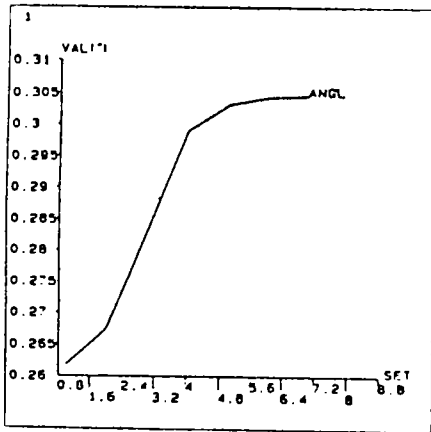


图3 状态变量优化曲线

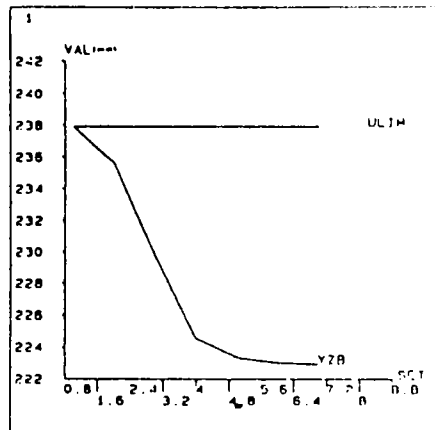


图4 设计变量优化曲线

表 1 优化结果

|      | 高度 $H(\text{mm})$ | 角度 $\Delta\beta(^{\circ})$ | 箱体重(Kg) | 优化率(%) |
|------|-------------------|----------------------------|---------|--------|
| 原方案  | 240               | 0.2618                     | 8.85    |        |
| 优化结果 | 226               | 0.3046                     | 8.23    | 7      |

## 4 实例 2:空间光学仪器的优化

对于空间光学仪器整体结构来说,应将其设计成在满足重量限制条件下动态响应最小。为此,一方面要考虑到其轻量化问题,同时应考虑到由于空间及发射环境的复杂和恶劣性,为保证仪器的工作精度,对其进行的轻量化工作应当与提高仪器的整体动态刚度、降低结构的动态响应结合起来,为此,可在仪器经过工程分析及设计改进,已经得到可行方案的基础上对其进行优化设计,以达到进一步提高仪器动态刚度及轻量化的目的。某空间光学仪器经过可行性研究后,已经得出可行方案,现对其进行可行域上的优化设计。

### (1)目标函数的建立:

由结构的动力学特性可知,仪器的动态响应取决于仪器本身的动态刚度,动态刚度越大,响应越小,表征动态刚度的指标为固有频率  $f_n$ ,而  $f_n$  同时也是表征结构比刚度的指标( $f_n = 1/2\pi\sqrt{K/M}$ )。因此,将  $f_n$  作为优化目标,寻求其在可行域上的极大值,不仅可以达到增加结构动态刚度、降低动态响应的目的,而且也使结构重量得到减轻,为此采用求固有频率负数极小值的方法进行目标函数的建立。

### (2)状态变量:

由于固有频率可以看作光学仪器整体的比刚度,因此,在对目标函数进行优化的同时,可使结构的质量有所降低,即通过降低质量来提高结构的固有频率,为此选取结构的总重量为优化状态变量;为使优化方案可行,应以仪器的技术要求参数作为状态变量,其值应取为影响结构动力学特性的主要环境激励作用下的结构响应值,其变化范围应在可行性要求之内。

### (3)设计变量:

根据仪器的有限元模型主要由不同厚度的壳单元生成,由于结构的质量、刚度的改变都可以通过调整壳单元壁厚来控制,因此优化的设计变量选为结构的壁厚,考虑到有些部位的壁厚已经很薄,没有再减小的必要性和可能性,故选取结构某些部位的壁厚为设计变量,为保证加工的基本要求及结构的几何拓扑关系,设计变量的取值范围应加以限制。

### (4)优化数学模型的建立

$$\begin{aligned} \min F &= f(\text{TH}_1, \text{TH}_2, \dots, \text{TH}_6) \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^6 a_i \text{TH}_i + \sum_{i=1}^6 b_i \text{TH}_i^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^6 c_{ij} \text{TH}_i \text{TH}_j \end{aligned}$$

$F$  为目标函数,这里为固有频率的负数;

$\text{TH}_i (i=1, \dots, 6)$  为设计变量,为结构的六处壁厚;

系数  $a_0, a_i, b_i, c_{ij}$  的确定通过最小二乘法得出;设计变量的变化范围为:

$$3\text{mm} \leq \text{TH}_i \leq 4\text{mm}$$

$$TH_1 \leq TH_2 \leq 5\text{mm}$$

$$TH_2 \leq TH_3 \leq 6\text{mm}$$

$$TH_3 \leq TH_4 \leq 7\text{mm}$$

$$TH_4 \leq TH_5 \leq 8\text{mm}$$

$$TH_5 \leq TH_6 \leq 8.5\text{mm}$$

约束条件为:

$$0 \leq TVOL \leq 0.304E7\text{mm}^3 \text{ (原体积)}$$

$$-0.021 \leq EX1 \leq 0.021$$

$$-0.021 \leq EX2 \leq 0.021$$

$$-0.021 \leq ETGX \leq 0.012$$

$TVOL$ : 结构有限元模型的总体积,

$EX1$ 、 $EX2$ 、 $ETGX$  为状态变量, 这里为结构的三个技术参数, 其值为结构在空间动态载荷作用下的最大响应, 其函数方程均采取与目标函数相同的形式, 通过数据拟合法得出。

### (5) 优化结果及分析

通过目标函数及状态变量函数方程的建立, 利用罚函数法<sup>[3]</sup>进行优化迭代, 每次迭代后形成新的目标函数及状态变量的函数方程, 经过 20 次迭代后, 得到目标函数的极值。固有频率的优化曲线见图 5、设计变量的优化曲线见图 6、状态变量的优化曲线见图 7、图 8。

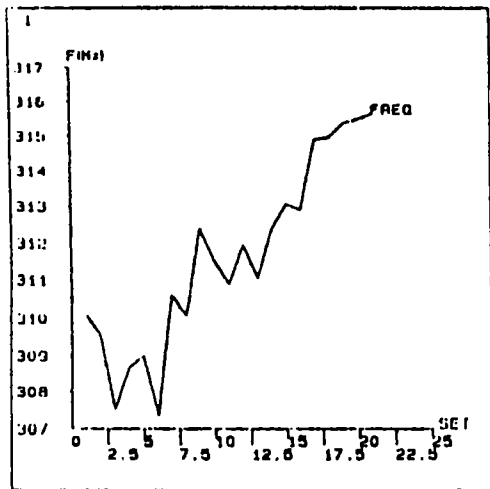


图 5 固有频率优化曲线

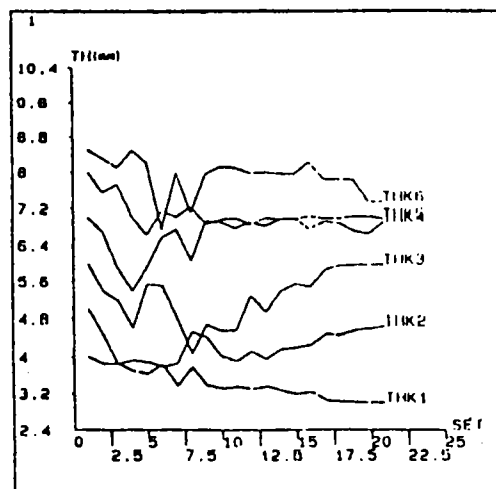


图 6 壁厚优化曲线

由图 5 可见, 经过优化迭代, 固有频率有所提高, 但数值不大, 这是由于质量减小导致局部刚度降低造成的, 由图 7 可见, 结构体积在优化后有所降低, 在第七组优化变量下具有较小的值, 从图 6、图 8 可见, 这时对应的状态变量值均满足要求, 综合以上结果, 选第七组优化解为最优方案, 与优化前相比, 最优方案的固有频率有所提高, 结构重量减轻 9.5%。

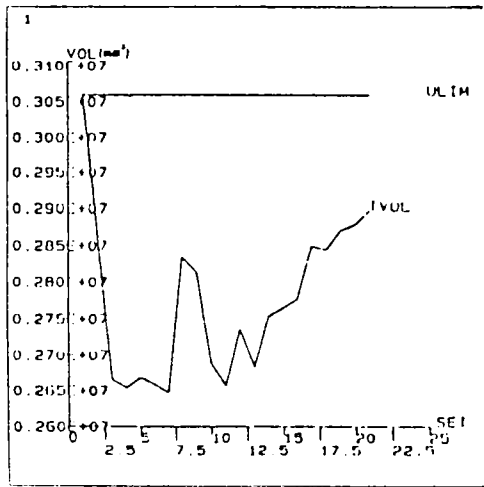


图7 体积优化曲线

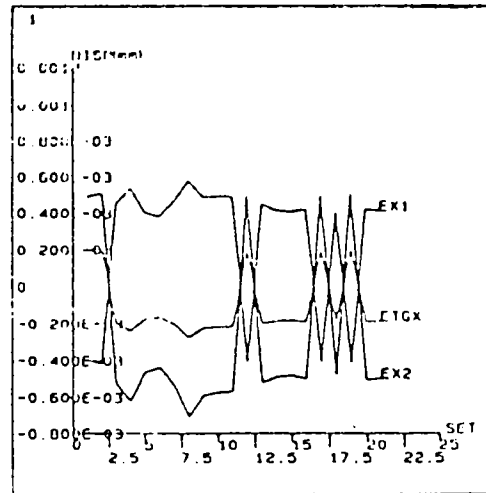


图8 技术参数优化曲线

## 参考文献

- [1] Ansys Finite Element Analysis Design Optimization Series. Swanson Analysis System, INC. 1989  
 [2] Ansys Engineering Analysis System Theoretical Manual. Swanson Analysis System, INC. 1988  
 [3] 郁永熙, 丁惠梁译, 实用最优设计. 北京: 科学出版社, 1985

## Method and Application of the Combination of FEM and the Optimum Method

Niu Xiaoming, Lu E

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

## Abstract

The method of combining the two basic tools in computer-aided Engineering-FEM and optimum method in the design of optical instruments is described in this paper, the selection and formation of optimum objective function and state variable in several space optical instruments are discussed and it provides the scientific references in engineering design.

**Key words:** FEM, Optimum design, Least mean square method