

棱镜几何参数的类复向量解法

赵峻彦

(吉林职业技术学院机械工程系, 长春 130052)

摘要 以类复向量方法求解棱镜几何参数, 求解过程简明清晰, 计算精确度高。本文仅用一个实例介绍其求解计算过程。

关键词: 类复向量; 空间机构; 计算; 棱镜

1 引言

在工程实际中, 往往需要求出一个平面立体的实形或实际角度。例如, 在棱镜设计时, 经常遇到二面角和其他几何参数的计算问题。这会涉及到三维空间的计算。

在三维空间的计算中, 纯数学传统的二参数给定方法, 其类复向量有它的局限性, 这种局限性使得它不能用到任何空间结构的计算中, 而只能用到某些空间结构(机构)的计算中。

针对这一情况, 文献^[1-9]推出了计算空间复矢量方位的三参数给定法, 该方法对空间几何体方位的确定更加直观, 并且克服了传统类复向量法的局限性, 能够通用于空间一切机构的运算。以下便是它的一个应用例。

图1所示为光学系统中常用的施米特屋脊棱镜^[10,11], 它的形状较复杂, 其中有些参数, 如图中的 $\angle A$ 、 $\angle B$, 由于棱13处于一般位置直线上, 所以用传统的数学方法来求解, 计算过程庞杂、零乱、累积误差较大。

在本文中, 用类复向量法求其实形, 计算过程简明清晰。以下详细说明计算过程。

2 全部参数的计算

首先, 取适当的方位, 将棱镜放入类复矢量坐标系中考察, 将棱镜的顶点1与坐标系中的原点O重合, 使棱12与x轴重合(图1), 在棱13上取类复矢量 \vec{R}_{13} 。用坐标旋转的方法(图2)可以得知:

向量 \vec{R}_{13} 属于M面, 所以其角参数:

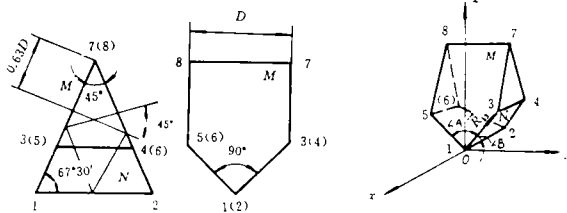


图1 施米特屋脊棱镜

进动角 $\alpha_1 = 90^\circ$ (即 M 面与 xoy 面的交线与 x 轴的夹角)。

章动角 $\gamma_1 = 67.5^\circ$ (即 M 面与 xoy 面的二面角)。

自转角 $\beta_1 = ?$

向量 \vec{R}_{13} 又属于 N 面, 所以其角参

数:

进动角 $\alpha_2 = 180^\circ$ (即 N 面与 xoy 面的交线与 x 轴的夹角)。

章动角 $\gamma_2 = 45^\circ$ (即 N 面与 xoy 面的二面角)。

自转角 $\beta_2 = ?$

将 \vec{R}_{13} 在 M 面、 N 面的角参数值分别代入类复向量公式^[1]:

$$\vec{R}(\alpha\beta\gamma) = R\{i(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + k\sin\beta\sin\gamma\}$$

其中: $i = 1$;

$$j = \sqrt{-1};$$

$$k = 1$$

则得:

$$\vec{R}_{73}^M = R_{73}\{i(-\sin\beta_1\cos 67.5^\circ) + j(\cos\beta_1) + k\sin\beta_1\sin 67.5^\circ\}$$

$$\vec{R}_{73}^N = R_{73}\{i(-\cos\beta_2 + j(-\sin\beta_2\cos 45^\circ) + k\sin 45^\circ\sin\beta_2\}$$

$$\therefore \vec{R}_{73}^M = \vec{R}_{73}^N$$

$$\therefore \sin\beta\cos 67.5^\circ = \cos\beta_1 \tag{1}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta_2 \tag{2}$$

$$\sin\beta_1\sin 67.5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta_2 \tag{3}$$

将(1)(2)(3)联立, 得:

$$\beta_2 = 73.675^\circ, \beta_1 = 47.266^\circ$$

\therefore 棱13与棱15之间夹角为:

$$\begin{aligned} \angle A &= (90^\circ - \beta_1) \times 2 \\ &= (90^\circ - 47.266^\circ) \times 2 \\ &= 85.468^\circ \end{aligned}$$

棱13与棱12之间夹角为:

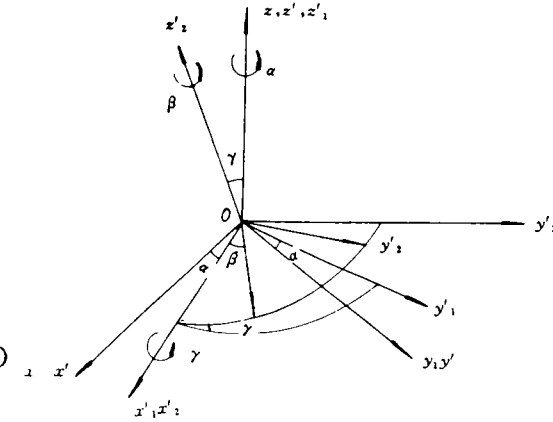


图2 \vec{R}_{13} 与动坐标轴 ox' 重合

$$\angle B = \angle \beta_2 = 73.675^\circ$$

有了以上二参数值,加之图 1 中所给的已知条件,棱镜的所有其他参数值便极易求出。本文不再赘述,只将计算结果列于表 1。

表 1

h	1.645D
12	1.645D
$\overline{73} = \overline{74} = \overline{85} = \overline{86}$	1.260D
$\overline{13} = \overline{24} = \overline{15} = \overline{36}$	0.710D
$\overline{34} = \overline{56}$	0.964D
$\angle 421 = \angle 621 = \angle 512 = \angle B$	73.675°
$\angle 431 = \angle 134 = \angle 265 = \angle 156$	106.325°
$\angle 734 = \angle 743 = \angle 685 = 856$	67.500°
$\angle 731 = \angle 851 = \angle 742 = \angle 862$	132.734°

至此,将施米特屋脊棱镜整个几何形状作了详尽描述。

3 结 论

采用类复向量法来计算平面立体的角度,简明、方便、精确,计算过程可归纳如下:

- (1)选取适当的方位,将平面立体放入类复坐标系中;
- (2)根据已知参数,写出有关棱线的复矢量方程;
- (3)求出解析角。

参 考 文 献

- [1]赵国文,安承业著,凸轮几何学.北京:机械工业出版社,1989
- [2]赵国文,类复向量导论.吉林职业师范学院学报,1992,(1—2)
- [3]赵国文,吴丽娟,机器人运动学的类复向量算法.机器人,1992,(3)
- [4]赵国文,空间连杆机构位移分析的类复向量算法.机械工程学报,1993,(2)
- [5]Chao Guowen, Similar complex Vector Principle in Kinematic Analysis of Robot. (ASME) Design Technical Conferences, 1992
- [6]赵国文,机器人运动学计算中的类复向量矩阵和基变换矩阵.吉林职业师范学院学报,1992,(3—4)
- [7]王桂玲、赵国文,类复向量在空间连杆机构运动分析上的应用.吉林职业师范学院学报,1992,(3—4)
- [8]赵国文,机器人运动学中的四元数矩阵和基变换矩阵.机器人,1993,(2)
- [9]段秀敏,可转位车刀几何角度的类复向量算法.吉林职业师范学院学报,1992,(1—2)
- [10]赵峻彦,折射棱镜二面角的空间解析几何解法.吉林职业师范学院学报,1989,(2)
- [11]北京理工大学光学教研室编,应用光学.北京:国防工业出版社,1989

Calculation of the Geometrical Parameters of Prisms with the Similar Complex Vector Method

Zhao Junyan

(*Department of Mechanical Engineering, Jilin
Vocational College, Changchun 130052*)

Abstract

Calculation of the geometrical parameters of prisms with the similar complex vector method has the advantages of simplicity, distinctness and high accuracy over other methods. The process of the calculation is given for a prism widely used in optical engineering.

Key words: Similar complex vector, Prisms, Calculation, Space mechanism