第4卷 第3期
1996年6月

光学 精密工程
OPTICS AND PRECISION ENGINEERING

Vol. 4. No. 3
June. 1996

求解正则式方程式集合高斯对角主元消元法

王 盾
（中国科学院长春光学精密机械研究所，长春 130022）

摘要 在分析利用系数矩阵进行消元变换求解正则表达方程式集合高斯消去法基础上，提出了一种选取系数矩阵中主元素进行消元变换求解正则表达式方程式集合的高斯主元消去法，并给出易编程的算法。

关键词：正则表达式；方程式集合，主元素消去法

1 引 言

用正则表达式线性方程组定义右线性语言，这在现今形式语言理论研究中常用的方法。文献[1][2]中对正则表达式线性方程组给出了严格的定义和证明，并提出了求解其最小不动点算法——高斯消去法。但该算法在程序实现上有一定的难度。文献[3]在对文献[1][2]中提出的求解算法的运算规则研究和剖析基础上，结合求解普通线性方程组的高斯消去法的解题方法，提出了利用系数矩阵进行消元变换求解正则表达式线性方程组的面向系数矩阵的高斯消去法，并给出了易编程的实现算法。但该算法每当出现消元元素为 Φ（空）时，需对系数矩阵进行调整变换，使变换后的系数矩阵满足消元条件，即消元元素不为 Φ。而调整变换就是做相应两个方程的求解和回代工作，实现起来较为复杂。本文在文献[3]提出的求解算法研究基础上，借鉴求解普通线性方程组的高斯主元素消去法的求解方法，提出了面向系数矩阵的对角主元素消去法，并给出易编程的实现法。该算法在每一步消元变换时，首先判断消元元素是否为 Φ，如果为 Φ，则不做文献[3]中求解算法采取的调整变换工作，而是选取对角线中第一个不为 Φ 的元素作为主元素，然后把该主元素对换到消元元素的位置上，使消元元素不为 Φ。这样就避开了调整变换这一较复杂和费时的问题，更进一步提高了算法的实用性。

2 对角主元素消去法

设有 n 个待定元的正则表达式线性方程组（以下简称方程组）

收稿日期：1996年3月7日

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{10}+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots\cdots+\alpha_{1n}x_n \\ x_2 &= \alpha_{20}+\alpha_{21}x_1+\cdots\cdots+\alpha_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{n0}+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\cdots\cdots+\alpha_{nn}x_n \end{aligned}\right] \tag{1}$$

其中，α_{ij}为不同于集合$\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$的某个字母表上正则表达式，若 $\alpha_{ij}=\Phi$，则位于 x_i 的方程式中的 x_j项不存在。若 $\alpha_{ij}=e$，则位于 x_i 方程式中恰有 x_j 项自身。

为便于后面的讨论，设常数项 $\alpha_{io}=\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$，并引进如下记号

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdots\\ \beta_n\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{2}$$

于是方程组(1)可简写为矩阵形式：

$$X=B+AX$$

并把方程组(2)记为

$$X=B^{(0)}+A^{(0)}X$$

其中　$A^{(0)}=({\alpha_{ij}}^{(0)})_n=A$，$B^{(0)}=({\beta_1}^{(0)},{\beta_2}^{(0)}\cdots,{\beta_n}^{(0)})^T=B$

变换要求 ${\alpha_{kk}}^{(k-1)}\neq\Phi(k=1,2,\cdots,n-1)$，但在消元过程中可能出现 $\alpha_{kk}^{(k-1)}=\Phi$ 的情况，这时必须按下述情况之一对矩阵 $A^{(k-1)}$、$B^{(k-1)}$进行调整变换，然后再继续进行消元计算过程。

(1)如果 $a_{ik}^{(k-1)}=\Phi\ (i=k+1,\cdots,n)$，则令 $A^{(k-1)}=A^{(k)}$和 $B^{(k-1)}=B^{(k)}$

(2)如果存在 $i(k+1\leqslant i\leqslant n)$，使 ${\alpha_{ik}}^{(k-1)}\neq\Phi$，且 ${\alpha_{ii}}^{(k-1)}\neq\Phi$，同时 $\alpha_{ki}^{(k-1)}\neq\Phi$，则首先对第 i 行进行如下计算：

$${\beta_j}^{(k)}={\alpha_{ii}}^{(k-1)*}{\beta_i}^{k-1}$$

$$\alpha_{ij}^{(k)}=\alpha_{ii}^{(k-1)*}\alpha_{ij}^{(k-1)}\qquad(j=k,k+1,\cdots,n)$$

再令 $\alpha_{ki}^{(k)}=\Phi$，完成对 x_i 方程式的求解。然后用下列公式实现把解 x_i 回代到 x_k 方程式右部中这一过程。

$${\beta_k}^{(k)}=\beta_k^{(k-1)}+\beta_i^{(k)}$$

$$\alpha_{ij}^{(k)}{\alpha_{kj}}^{(k-1)}{\alpha_{ki}}^{(k-1)}{\alpha_{ij}}^{(k)}\quad(j=k,k+1,\cdots.n)$$

再令 $\alpha_{ki}^{(k)}=\Phi$，且交换 $\beta_k^{(k)}$ 同 $\beta_k^{(k-1)}$ 和 $\alpha_{kj}^{(k)}$同 $\alpha_{kj}^{(k-1)}$的值，生成新 $A^{(k-1)}$、$B^{(k-1)}$其中 ${\alpha_{kk}}^{(k-1)}\neq\Phi$，满足消元条件。

(3)如果 $\alpha_{ik}^{(k-1)}\neq\Phi$，但 $\alpha_{ii}^{(k-1)}=\Phi$ 或 $\alpha_{ik}^{(k-1)}\neq\Phi$，且 ${\alpha_{ii}}^{(k-1)}\neq\Phi$，但 ${\alpha_{ki}}^{(k-1)}=\Phi(i=k+1,\cdots,n)$，这时此方程组应化简为阶数小于 n 的方程组来处理。

上述调整变换过程，需要对各种情况进行判断，必要时还要做方程的求解和回代工作，实现起来是较为复杂的。而以下所论述的对角主元素消去法的主要思想是：在第一步消元变换之前，选取第一个 $\alpha_{ii}^{(k-1)}(k\leqslant i\leqslant n)$不为 Φ 的无素作为主元素，对换 $A^{(k-1)}$、$B^{(k-1)}$中第 i 行与第 k 行元素和 $A^{(k-1)}$中第 i 列与第 k 列元素，使 $A^{(k-1)}$中的 $\alpha_{kk}^{(k-1)}\neq\Phi$。之后再对 $A^{(k-1)}$，$B^{(k-1)}$施行消元变换，生成 $A^{(k)}$，$B^{(k)}$. 这样即不需做复杂的判断工作，也避开了方程的中间求解和回代过程。

设方程组(1)的增广矩阵为

$$[A,B]=[A^{(0)},B^{(0)}]=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \alpha_{i_1 i_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

第一步在 A 中选取第一个 $\alpha_{i_1 i_1}\neq\Phi$ $(1\leqslant i\leqslant n)$作为主元素，然后交换[A,B]的第 1 行与第 i_1 行元素，交换 A 的第 1 列与第 i_1 列元素，即调换待定元 x_1 和 X_{i1}的次序、且仍记为[A,B]，再进行消元计算。

重复上述过程，设已完成第 $k-1$ 的选主元，交换行及交换列，消元计算，使[A,B]约化为

$$[A,B]\rightarrow[A^{(k-1)},B^{(k-1)}]=\begin{bmatrix} \Phi & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \Phi & \Phi & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \alpha_{kk} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi & \Phi & \alpha_{nk} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

等式右边矩阵中的长方框表示第 k 步选主元素区域。为简单起见，$A^{(k-1)}$元素仍记为 α_{ij}，$B^{(k-1)}$元素仍记为 β_i

对于 $k=1,2\cdots,n-1$ 按下述步骤从(1)做到(4)

(1)选主元素，即确定 i_k，使 $\alpha_{i_k i_k}\neq\Phi$

(2)交换$[A^{(k-1)}B^{(k-1)}]$的第 k 行与第 i_k 行元素、变换 $A^{(k-1)}$第 k 列与第 i_k 列元素(若 $i_k\neq k$)。

(3)等价变换

$$\beta_k\leftarrow\alpha_{kk}^{*}\beta_k$$

$$\alpha_{kj}\leftarrow\alpha_{kk}^{*}\alpha_{kj}\quad(j=k+1,k+2,\cdots,n)$$

(4)消元计算

$$\beta_i\leftarrow\beta_i+\alpha_{ik}\beta_k\quad(i=k+1,k+2,\cdots n)$$

$$\alpha_{ij}\leftarrow\alpha_{ij}+\alpha_{ik}\alpha_{kj}\quad(i,j=k+1,k=2,\cdots,n)$$

$$\alpha_{ik}\leftarrow\Phi\quad(i=k,k+1,\cdots,n)$$

(5)加代求解

经过 $n-1$ 步选主元，交换行及交换列，消元计算，方程组约化为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \Phi & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \Phi & \Phi & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi & \cdots & \cdots & \Phi & \alpha_{n-1\,n} \\ \Phi & \cdots & \cdots & \Phi & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 $y_1y_2,\cdots,y_n$ 为待定元 $x_1,x_2\cdots x_n$ 调换后的次序。其回代公式为：

$$y_n\leftarrow\alpha_{nn}^{*}\beta_n$$

$$y_k\leftarrow\beta_k+\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_{kj}x_j,(k=n-1,\cdots,2,1)$$

由于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 调换后的顺序，则 y_i 的值不一定是 x_i 的值，因此在实现算法中应考虑 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 同 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对应关系，使输出结果满足 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的排列顺序

算法：

INPUT：正则表达式线性方程组系数矩阵 $(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 与常数项 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T$。

OUTPU：$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的一组解（最小不动点）。

ALGORITHM：

(0) $l_i\leftarrow i\quad(i=1,2,\cdots,n)$。

（注：对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 做到第4步）。

(1)选主元素，确定 i_k，使 $\alpha_{i_k i_k}\neq\Phi$

(2)如果 $i_k=k$ 则转(3)，否则交换 $[A^{(k-1)},B^{(k-1)}]$ 的第 k 行与第 i_k 行元素，交换 $A^{(k-1)}$ 的第 k 列与第 i_k 列元素，交换 l_k 与 l_{ik} 的元素。

(3)等价交换

$$\beta_k\leftarrow\alpha_{kk}^{*}\beta_k$$

$$\alpha_{kj}\leftarrow\alpha_{kk}^{*}\alpha_{kj}\qquad(j=k+1,k+2,\cdots,n)$$

(4)消元计算

$$\beta_i\leftarrow\beta_i+\alpha_{ik}\beta_k\qquad(i=k+1,k+2,\cdots,n)$$

$$\alpha_{ij}\leftarrow\alpha_{ij}+\alpha_{ik}\alpha_{kj}\qquad(i,j=k+1,k+2,\cdots,n)$$

$$\alpha_{ik}\leftarrow\Phi\qquad(i=k,k+1,\cdots,n)$$

(5)回代求解

$$y_n\leftarrow\alpha_{nn}^{*}\beta_n$$

$$y_k\leftarrow\beta_k+\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_{kj}x_j(k=n-1,\cdots,2,1)\tag{6}$$

(6)排序

把 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的值按 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 的值升序排序，即交换 l_i 和 l_j 的值时亦交换 y_i 和 y_j 的值，使 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$。

3　求解过程中计算时间复杂度分析

消元过程的计算量，第 k 步 $(k=1,2,\cdots n)$ 对第 k 等价变换计算 $\alpha_{kj}(j=k+1,k+2,\cdots,n)$，需要做 $(n-1)$ 次连接运算，消元计算 $\alpha_{ij}(i,j=k+1,\cdots,n)$，需要做 $(n-k)^n$ 次连接运算，计算 β_i $(i=k,\cdots,n)$ 需要做 $(n-k+1)$ 次连接运算，于是整个消元过程所需的运算次数（记为 $T_1(n)$）为

$$T_1(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{1}{6}$$

是 $O(n^3)$ 的。

回代过程的计算量，对回代求解公式(6)进行分析，求解 $y_k(k=n-1,\cdots,n)$ 包括两方面的连接运算，1. 计算 $\alpha_{kj}x_j(j=k+1\cdots,n)$ 需要做 $(n-k)$ 次。2. 把符号"+"连接到正则表达式 x_k 中，需要做 $2(n-k)$ 次计算。于是，整个回代过程的连接运算次数（记为 $T_2(n)$）为

$$T_2(n)=\frac{3n^2-n}{2}$$

是 $O(n_2)$的。

通过上述分析，得到如下结论：采用系数矩阵求解正则表达式线性方程组 $X=B+AX$ 的对角主元素消去法，所需总的运算次数（记为 $T(n)$）为

$$T(n)=T_1(n)+T_2(n)=\frac{n^3}{3}+2n^2-\frac{n}{3}$$

时间复杂度是 $O(n^3)$的。这同求解普通线性方程组的高斯主元素消去法时间复杂度是相同的。

参 考 文 献

[1] Aho A. V. ,Ullmin J. D. ,The Theory of Parsing,Translation,and Compilling. Volume 1 parsing,Prentice —Hall,1972. 8

[2] 邹海明，周新，形式语言、自动机和语法分析. 武汉：华中工学院出版社，1985

[3] 张伟、苑森淼，求解正则表达式方程组高斯消去法的矩阵方法. 吉林工业大学学报，1995，(3)：60—66

Gaussian Diagonal Main Element Eilmination for Aeeking the Answer of Regular Expression Equation Set

Wang Dun

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences ,Changchun 130022)

Abstract

On the basis of analysing Gaussina elimination which uses coefficient matrix to do the elimination transform for seeking the answer of regular expression equation set,this paper proposes a sort of Gaussian main element elinination which selects the main element in coefficient natrix to do the elimination transform for seeking the answer of reguler expression equation set,and gives the easy-to-program algorithm.

Key words: Regular expression ,Equation sert ,Main elenent elimination

王 盾 男，1956年生，1980年毕业于吉林大学计算机科学系软件专业，一直从事计算机软件的开发与自动控制的工作。