第 5 卷　第 1 期　　光学　精密工程　　Vol. 5, No. 1
1997 年 2 月　　OPTICS AND PRECISION ENGINEERING　　February, 1997

Hadamard 矩阵与图像及其实现的自动机技术

王世昌
(烟台大学数学与信息科学系, 烟台 264005)

摘要　研究了用 Hadamard 矩阵生成一类图像的方法。然后给出其电路实现的自动机技术。

关键词: Hadamard 矩阵; 图像; 自动机

1 引　　言

Hadamard 矩阵在光谱学, 图像处理, 编码理论及密码学等方面均有广泛的应用, 本文是研究用 Hadamard 矩阵生成一类图像的方法与技术。Culik, Ⅱ. and S. Dude [1] 讨论了用 "仿射变换、收缩映射及随机仿射自动机" 生成如图 1 的图像。

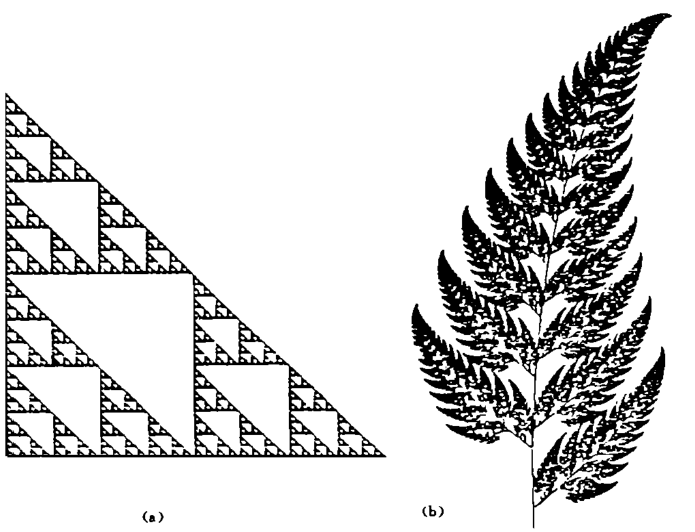

Fig. 1　Examples of images generated by probabilistics affine automata

显然图 1(a) 可用二阶 Hadamard 矩阵:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

及给定一收缩因子 S($0 \le S < 1$) 叠合生成, 从而使图 1(a) 的生成变得算法清析且简单。然后再用仿射自动机生成图 1(b)。

收稿日期: 1996 年 3 月 20 日

本文研究了用 Hadamard 矩阵构造一类图像的方法, 并给出了 $2^n(n \geq 1)$ 阶 Hadamar 矩阵的电路实现的自动机方法, 从而使生成的图像电路化、动态化、可变化、这一工作是很有意义的。

2 Hadamard 矩阵[2]

下面简称 Hadamard 矩阵为 H 矩阵

2. 1 $2^n(n\geq1)$阶 H 矩阵

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$H_{2n} = H_2 \times H_{2n-1} \tag{2}$$

其中 "X" 为直积。

由(1), (2)式得:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$H_{16} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{bmatrix} \tag{4}$$

任意 $2^n(n \geq 1)$ 阶 H 矩阵直接算法:

令: H 方阵的头行为第 0 行, 头列为第 0 列

$H_{i,j}$ 为 H 矩阵的 i 行 j 列元素

$i = i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 行 i 的 n 位 2 进制表示

$j = j_n j_{n-1} \cdots j_1$ 列 j 的 n 位 2 进制表示

$$\sum_{i,j} = i_n j_n + i_{n-1} j_{n-1} + \cdots + i_1 j_1$$

则

$$H_{i,j} = (-1)^{\sum_{i,j}} \tag{5}$$

2. 2　$4t(t \geq 2)$ 阶规范化 H 矩阵算法

定义 1 “组合设计”, 一个非完备对称组合设计是: 将 T 个不同元素的集合, 分为 b 组, 每组恰含有 k 个不同元素, 每个元素恰出现在 r 个不同的组中, 而且不同元系 $a_i, a_j (i \neq j)$ 的每一对同时出现在恰好 K 个组中。

定义 2 “(T, k, K) 组态”。我们称定义 1 中的参数 T, k, K 为 - “(T, k, K) 组态”。

定义 3 “差集”, 一取 k 个余数的集合 $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \pmod T$ 称为 - (T, k, K) 差集, 若对每一个数 $d \neq 0 \pmod T$, 恰有 K 个有序对 (a_i, a_j), $a_i, a_j \in D$, 使 $a_i - a_j \equiv d \pmod T$。

定理[3] 设 D 是参数为 T, k, K 的差集, d 是 K - K 的一个因子, 而且 $(d, T) = 1$, $d > K$, 又设 r 是一个整数, 对于 d 的每一个素因子 P 都有某个整数 j 使 $P^j \equiv r \pmod T$, 则 r 是差集 D 的乘子。

我们用 $r \pmod T$ 的各次幂可求出差集。并由差集可构造出 $4t(t \geq 2)$ 阶规范化 H 矩阵[2], 例如:

如若取 $t = 3$, 则 $T = 4 \times 3 - 1 = 11$, $K = 2t - 1 = 5$, $K = t - 1 = 2$, 则乘子为 3, 其 (T, k, K) 差集有:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{1, 3, 4, 5, 9\} \\
B_1 &= \{2, 4, 5, 6, 10\} \\
B_2 &= \{3, 5, 6, 7, 0\} \\
B_3 &= \{4, 6, 7, 8, 1\} \\
B_4 &= \{5, 7, 8, 9, 2\} \\
B_5 &= \{6, 8, 9, 10, 3\} \\
B_6 &= \{7, 9, 10, 0, 4\} \\
B_7 &= \{8, 10, 0, 1, 5\} \\
B_8 &= \{9, 0, 1, 2, 6\} \\
B_9 &= \{10, 1, 2, 3, 7\} \\
B_{10} &= \{0, 2, 3, 4, 8\}
\end{aligned} \tag{6}$$

由(6)式可得矩阵:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} \tag{7}$$

由(7)式得到 12 阶规范化 H 矩阵:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix} \tag{8}
$$

3　图像的生成

“1 ”在图像的 “△ ”格中着黑色。

“- 1 ”在图像的 “△ ”格中为空白。

按规则 1[4] 我们划出 H_4 对应的图像图 2, H_{16}对应图像图 3。

按规则 1 及规则 2, 划出 H_{12}的部分图像图 4, 和部分组合图像图 5。

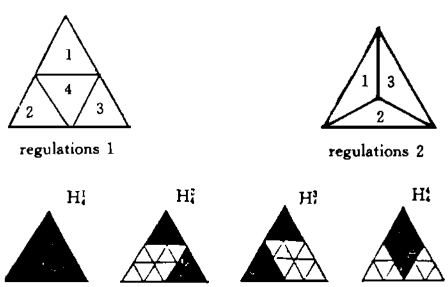

Fig. 2　Images of H_4

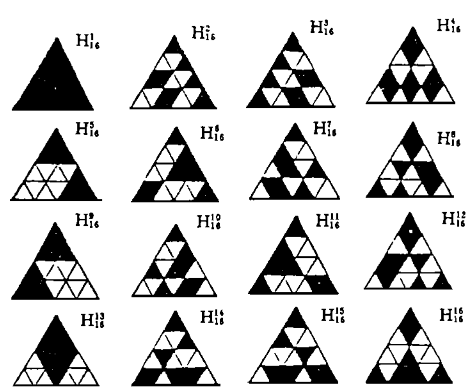

Fig. 3　Images of H_{16}

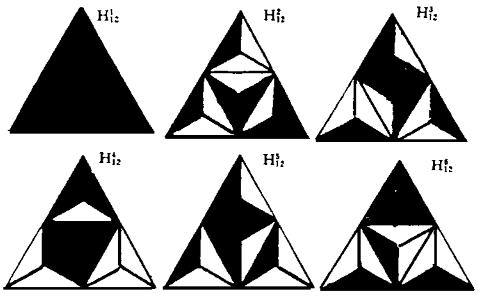

Fig. 4　Partial images of H_{12}

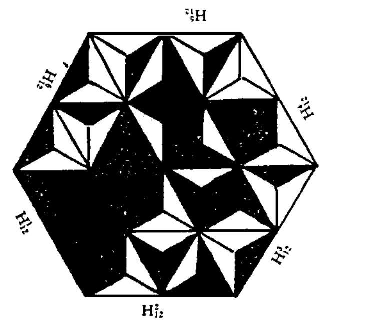

Fig. 5　Image of combined partial images of H_{12}

4　实现 $2^n(n \geq 1)$ 阶 H 矩阵的自动机方法及电路实现

由(5)式知, 若 $\sum_{i,j}$ 表示 $\oplus$ 运算, 则有

$$(-1)^{\sum_{i,j}} = \begin{cases} -1, \text{当} \sum_{i,j} \equiv 1 \mod 2 \\ 1, \text{当} \sum_{i,j} \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

其中

$$\sum_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k \qquad (9)$$

(9)式可用:

$$Q_k = (i_k, j_k) \oplus Q_{k-1} \qquad (10)$$

Q_0 为初始状态($Q_0 = 0$)

$i_k, j_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 为两个输入。

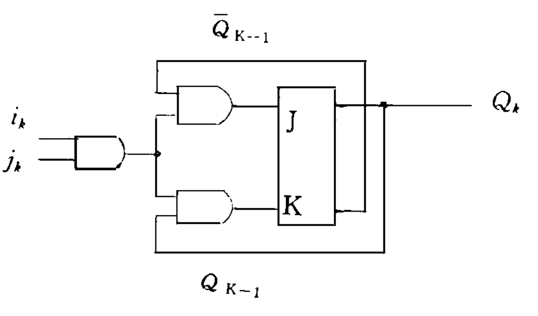

Fig. 6　The logic circuit of the realizing $\sum_{i,j}$

实现, 显然(10)式是两个输入端, 一个状态变量的有限自动机, 可用一个“J-K”触发器予以实现。其逻辑线路如下:

$k = 1, 2, \cdots, n$

5　结　束　语

由上述讨论可见, 本文讨论的一类图像的生成, 算法清晰, 严谨, 并用自动机算法予以电路实现。本工作在信息处理、图像生成、舞台与灯光的组合设计中均是很有意义的。

参 考 文 献

[1] Culik I I, Dude S. Affine Automata and Related Techniques for Generation of Complex Images. Theoretical Computer Science, 1993: 373～398

[2] 王世昌. 4t(t≤2)阶规范化 HADAMARD 矩阵算法. 烟台大学学报, 自然科学与工程版, 1989: 15- 20

[3] Ryser H J. Combinatorial Mathematics. New York Ass Amer, 1963

[4] Qi Dong-xu, On the Haar and Walsh Systems on a Triangle. Jour. of Computational Math July, 1983

The Hadamard Matrix and the Image and their Implementation by the Automata Technique

Wang Shichang

(Department of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai 264003)

Abstract

In this paper, it is studied that the image of the same class is generated by the Hadamard matrix. Then the automata technique to realize them is given.

Key words: Hadamard matrix, Image, Automata

王世昌　男, 1940 年 11 月生。1964 年毕业于吉林大学计算数学专业控制论专门化, 主要研究方向是: 自动机理论及其应用, 数字逻辑、信息保密技术。取得主要鉴定成果有: 薄膜测量光谱仪, 30 kW 氙灯电源。发表论文 20 余篇, 主要有: 基于自动机的分析与综合因素神经网络的自动实现、流密码中 Bent 函数与有限状态机组合器、一个基于布尔方程的简化组合逻辑设计的分解方法、字符串匹配的自动机方法、S- 盒随机化与随机化 DES 链式结构、4t(t≥2) 阶规范化 Hardamard 矩阵算法等。