

# 紫外平面全息正弦光栅与闪耀光栅 部分特性的理论研究

王淑红 李福田

(中国科学院长春光学精密机械研究所国家重点实验室, 长春 130022)

**摘要** 基于有限电导率光栅的微分理论,对工作在紫外光区的全息正弦光栅和三角槽形光栅的衍射效率做了数值计算。给出了紫外全息光栅的闪耀特性分布曲线并分析了三角槽形光栅顶角大小对衍射效率的影响。

**关键词:** 全息正弦光栅; 闪耀光栅; 衍射效率

## 1 引言

光栅的效率是评价光栅性能最重要的参数。五十年代以前,人们一直用标量理论来计算光栅的衍射效率,二次大战后,随着光栅制造业的迅猛发展,生产光栅周期同光波长可比的光栅成为可能,但此时光的偏振特性对衍射效率的影响不能再忽略,所以急需一套计入光矢量特性的光栅理论来研究光栅的衍射效率。从1959年起大批物理学工作者致力于此项研究,相继形成了积分理论<sup>[1-2]</sup>,微分理论<sup>[3-4]</sup>和模态展开理论<sup>[5]</sup>等。

积分理论是以光栅平面具有无限电导率为基础的理论,在可见光区尤其是红外光区能够给出精确解;微分理论考虑到介质表面不可忽略的电导率的影响,而适用于电介质光栅,并在紫外、远紫外及X射线光区都能得到正确解;模态展开理论是积分方法对某种特定光栅的简化,也是以无限电导率为基础的。

McPhedran<sup>[6]</sup>等人用积分方法对可见光区全息光栅的闪耀特性做了全面深入的研究,Bousquet<sup>[7]</sup>对可见光区和红外光区的三角槽形光栅(闪耀光栅)进行了数值计算。随着紫外光栅的应用日益广泛,对紫外光栅的特性进行全面深入的研究是十分必要的。在我国,由于光栅生产方面的限制,光栅的理论研究起步较晚,尤其是对紫外光栅的研究还未见报道。本文根据适用于紫外光栅的有限电导率理论,采用恰当稳定的数值算法,对紫外全息光栅的闪耀特性和三角槽形光栅顶角对衍射效率的影响做了数值计算,给出了十分有意义的结果。

## 2 微分理论的基本思想

如图 1 所示为笛卡尔坐标系下无限大平面光栅示意图,  $y = f(x)$  是光栅刻槽轮廓线, 它是在  $x$  方向以光栅周期  $d$  为周期的周期函数, 其准线方向为  $z$  轴, 光栅的空间频率为  $K = 2\pi/d$ , 刻槽深度为  $h$ ,  $y > f(x)$  处介质为空气  $\epsilon_1 = 1$ ,  $y < f(x)$  处介质的介电常数为  $\epsilon_2$  (对金属为复数)。

假设一波矢为  $k_i$  的单色平面波  $u_1$  以入射角  $\theta$  照射到光栅上, 用  $u_2$  表示衍射场,  $u$  表示总场。由光栅电磁理论知道, 总场  $u$  在光栅空间各处均满足 Helmholtz 方程, 即:

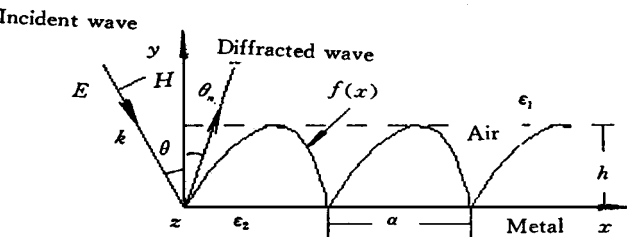


Fig. 1 Illustration of parameters which are used for calculation the grating efficiency

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (2)$$

其中  $\mu$  为磁导率, 在光栅问题中它等于真空中的值。微分方法的思想是将满足上述波方程的函数投影到一组适当的基函数上, 从而得到一组耦合常微分方程, 解此方程即可得到相应于衍射场的场矢量。考虑到光栅的周期结构, 可以选择一组指数基函数  $\{\exp[i\alpha x]\}$ , 其中:

$$\alpha = nK + \alpha_0 = k_i \sin\theta + 2\pi n/d$$

因光栅的两正交电矢量  $E$  (即平行于光栅刻槽, 以下称 P 偏振) 和  $E$  (即垂直于刻槽, 常用平行于刻槽的分量  $H$  表示之, 以下称 S 偏振) 沿光栅各衍射级次的能量分布是不同的<sup>[8]</sup>, 因此要对 P、S 偏振分别研究。用  $u_z$  代替 P 偏振时的  $E_z$  或 S 偏振时的  $H_z$  在所选的基函数  $\{\exp[i\alpha x]\}$  上做展开, 有:

$$u_z(x, y) = \sum_n u_n(y) \exp[i\alpha x] \quad (3)$$

### 2.1 P 偏振情况

此时, Helmholtz 方程变为:

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (4)$$

由(3)式又有:

$$E_z(x, y) = \sum_n E_n(y) \exp[i\alpha x] \quad (5)$$

将(4)式中的  $k^2$  做付里叶展开:

$$k^2(x, y) = \sum_n (k^2)_n \exp[inKx] \quad (6)$$

从而看出  $k^2(x, y)$  与  $E_z(x, y)$  的积是可在同一基函数上展开的函数, 展开系数为  $(k^2)_{n-m} E_m$ , 将此展开并(5)式一同代入(4)式, 得到了一组无限维耦合常微方程:

$$\frac{d^2 E_n(y)}{dy^2} = \alpha_n^2 E_n(y) - \sum_m (k^2)_{n-m} E_m(y) \quad (7)$$

## 2.2 S 偏振情况

$H_z$  在介电常数不连续的表面, 其导数通常也不连续, 所以  $\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$  在分布意义上往往不成立, 因而必须找到一个对  $y$  轴处处连续的微分方程。由 Maxwell 方程:

$$\nabla \times \mathbf{H}_z = -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}_z \quad (9)$$

因为

$$\nabla \times \mathbf{H}_z = \nabla H_z \times \mathbf{Z} \quad (10)$$

将(10)代入(8)中并消去(8)、(9)两式中的  $\mathbf{E}$  即得到:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{1}{k^2} \nabla H_z \right] + H_z = 0 \quad (11)$$

其中

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

不难证明散度算符的连续性, 至此我们得到了关于  $H_z$  的微分方程, (11) 式还可写为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] + H_z = 0 \quad (12)$$

## 3 数值处理

衍射场  $u_2$  按瑞利展开<sup>[9]</sup> 的表示式为:

$$u_2(x, y) = \sum_n B_n \exp[i\alpha_n x + i\beta_n y] \quad (13)$$

其中

$$\beta_n^2 = k^2 - \alpha_n^2$$

再根据光栅方程:

$$\sin\theta_n + \sin\theta = \frac{n\lambda}{d} \quad (14)$$

可以十分容易地推导出光栅第  $n$  级的衍射效率公式:

$$\eta_n = B_n B_n \frac{\cos\theta_n}{\cos\theta} \quad (15)$$

那么对  $E_z$  和  $H_z$  的数值处理就是求出与各衍射级次对应的系数  $B_n$ 。

由于在  $y > h$  和  $y < 0$  处介质的介电常数均为常量, 且  $E$  分量及其导数在介质表面连续, 可得到  $y = 0$  时(7) 式的积分初始条件, 然后对(7) 式在调制带( $0 < y < h$ ) 积分并匹配到  $y = 0$  平面, 即可得到 P 偏振情况下的一组  $B_n$  值。为实现数值计算, 要对无限维微分方程进行有效截取, 对相应的衍射级次数目  $N$  一般取  $(2N + 1)$  项。为得到精确稳定解, 我们采用 Numerov<sup>[10]</sup> 算法进行数值积分。

对 S 偏振为实现数值计算, 引入变量  $W$  :

$$W = \frac{1}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{E_x}{i\mu} \quad (16)$$

并考虑(3) 式

$$H_z(x, y) = \sum_n H_n(y) \exp[i\alpha_n x] \quad (17)$$

将(16)、(17)式代入(12)式,则(12)式变成了一组简单明了的微分方程组:

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = \alpha_n (k^2)_{n-m} W \quad (18)$$

$$\frac{dW(y)}{dy} = \alpha_n \alpha_m \left(\frac{1}{k^2}\right)_{n-m} H_m - H_n \quad (19)$$

对上两式进行六阶 Runge-kutta 数值积分,同  $E_z$  一样可得到一组相应于  $H_z$  和  $B_n$  值。

由(14)、(15)式分别算出 P 偏振和 S 偏振的衍射效率,同时也就给出了光栅的偏振特性,再将两偏振情况下的效率求算术平均可得到无偏振入射光的衍射效率。

## 4 结果与分析

本文对全息正弦光栅和三角槽形光栅分别进行了数值计算,给出在 -1 级 Littrow 安装时正弦光栅闪耀特性随调制深度 ( $h/d$ ) 的变化,找到最佳  $h/d$  值;以三角槽形光栅的顶角作为函数计算衍射效率值,可以给出最佳顶角范围。

### 4.1 三角槽形光栅

如图 2 所示为一三角槽形光栅,闪耀角为  $\theta_b$ ,光栅周期为  $d$ 。通过适当地选择  $\theta_b$  和  $d$  可在所希望的波长与级次上得到最大绝对衍射效率,此波长  $\lambda$  称为闪耀波长,一般地  $\theta_b$  越小,  $\lambda$  越短。但是对于这种槽形光栅,其顶角  $\varphi$

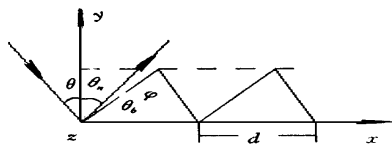


Fig. 2 Geometry for the triangle grating

也是一个可变量,那么  $\varphi$  为多少时对给定的  $\theta_b$  和  $d$  可给出最大效率呢?本文对 2400 槽/mm  $\theta_b$  为 8 和 3600 槽/mm  $\theta_b$  为 15 的三角槽形光栅衍射效率随顶角  $\varphi$  的变化做了数值计算,得到图 3、图 4 所示的曲线。

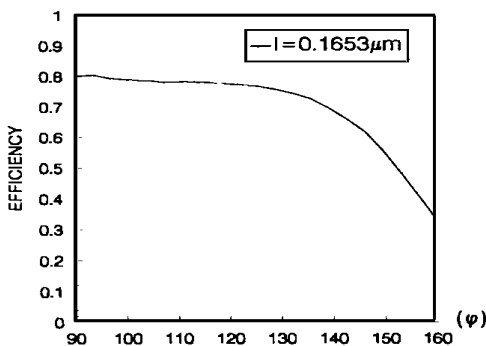


Fig. 3 -1 order efficiency curve in Littrow configuration and for a 8° blaze angle, 2400 grooves/mm triangle Al-coated grating versus the apex angle,  $\lambda = 0.1653 \mu\text{m}$

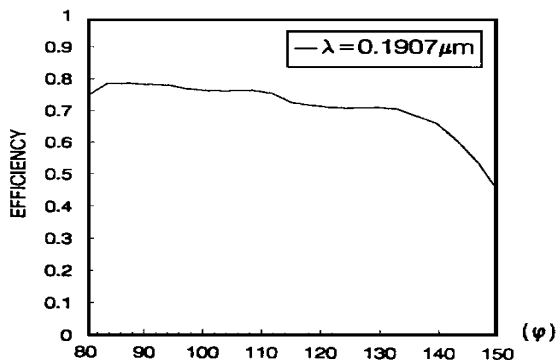


Fig. 4 -1 order efficiency curve in Littrow configuration and for a 15° blaze angle, 3600 grooves/mm triangle Al-coated grating versus the apex angle,  $\lambda = 0.1907 \mu\text{m}$

两种情况的光栅周期和闪耀角均不相同,但图3和图4皆表明在理想顶角即 $\varphi=90^\circ$ 时效率最大,当 $\varphi$ 在 $90^\circ\sim 120^\circ$ 间变化时效率下降比较缓慢,也就是说当顶角在 $90^\circ\sim 120^\circ$ 间都能得到较为理想的效率,超过 $120^\circ$ 以后效率下降很快。

#### 4.2 正弦全息光栅

1967年德国哥廷根大学的Rudolph和Schmahl提出了用全息照相法制造光栅的思想,并首次证明了用这种方法制造的光栅——全息光栅具有良好的光谱性能,而且它具有很小的杂散光并可以有很高的刻线密度,因而广泛地用于各种光谱仪器中。全息光栅可分为具有对称槽形的正弦全息光栅和具有非对称锯齿槽形的全息光栅,后者同一般刻划光栅一样可通过调节闪耀角来实现对特定波长的闪耀,在极紫外十分有用,但它的制造工艺较前者复杂得多,技术难度也更大。正弦全息光栅具有对称槽形,不能如闪耀光栅那样通过调节闪耀角来实现闪耀,但在两级传播(即 $2/3 \leq Nd \leq 2$ )通过适当地选择槽深,这种光栅也可以出现“闪耀”,并得到与具有相同光栅周期的刻划光栅相当的效率,图5的曲线充分说明了这一点,因而研究正弦全息光栅衍射效率随槽深变化的闪耀特性是十分有必要的。

光谱仪器中所用的光栅调制深度范围一般为 $0.05 \leq h/d \leq 0.5$ ,本文在此范围内研究了正弦全息光栅的闪耀特性。图6、7、8分别给出了2400槽/mm、3600槽/mm和4096槽/mm镀Al正弦全息光栅在-1级Littrow安装时的效率曲线,表明随着光栅槽密度的增加,效率峰值向短波长方向移动,最大理论效率可达到70%左右。图8中对4096槽/mm光栅给出了四个波长随调制深度的变化曲线,对 $\lambda=0.1771\mu\text{m}$ ,最佳 $h/d=0.138$ , $\lambda=0.1907\mu\text{m}$ , $h/d=0.154$ , $\lambda=0.2066\mu\text{m}$ , $h/d=0.165$ , $\lambda=0.2254\mu\text{m}$ , $h/d=0.23$ ,可见随着波长增加,调制深度变深,这表明当“闪耀”波长变短时光栅的槽也愈浅,图6、7的曲线也给出了同样的结论。

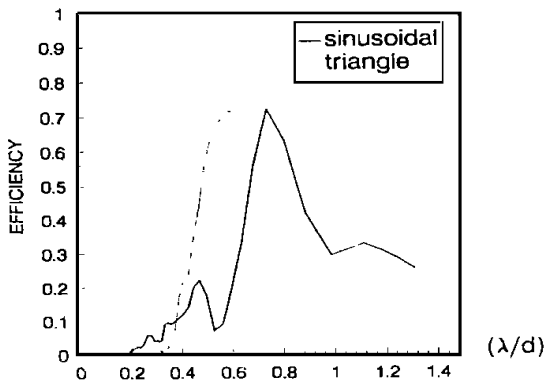


Fig. 5 The comparison of diffraction efficiency between sinusoidal and ruled grating in Littrow configuration. Ruled grating with  $20^\circ$  blazed angle and sinusoidal grating with 0.145 lated depth and all with 3600 grooves/mm density

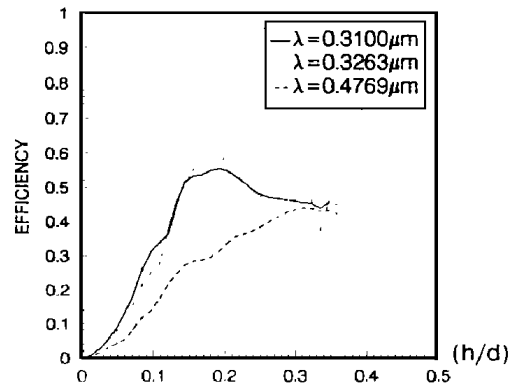


Fig. 6 -1-order efficiency curves in Littrow configuration for 2400 grooves/mm Al-coated sinusoidal gratings versus modulated depth

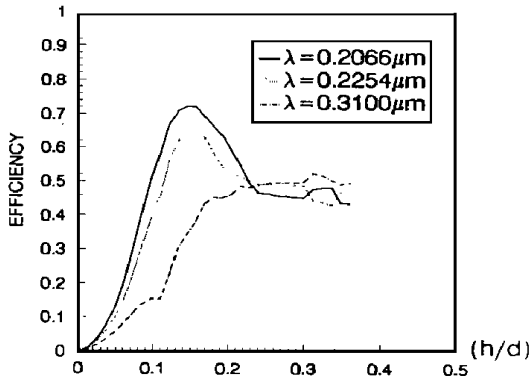


Fig. 7 Same as Fig. 6 except 3600 grooves/mm

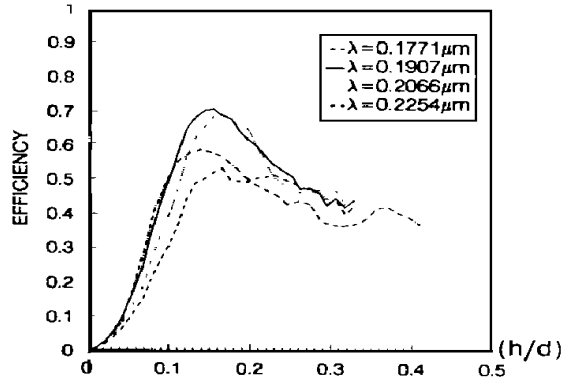


Fig. 8 Same as Fig. 6 except 4096 grooves/mm

## 5 结 论

我们采用有限电导率微分理论结合可靠稳定的数值算法, 编制了可计算任意槽形光栅衍射效率曲线的软件, 并用光栅电磁理论中重要的互易定理、能量守恒定理和结果稳定性原理对软件进行考核, 均得到了正确结果, 然后用此软件计算了三角槽形光栅顶角对效率的影响, 给出了曲线并得到最佳顶角范围为  $90^\circ \sim 120^\circ$  的结论。又对三种槽密度的正弦全息光栅闪耀特性(效率随  $h/d$  的变化曲线)作了数值计算, 给出了相应的效率曲线, 得到“闪耀”波长随槽深增加而变长, 随槽密度增加而变短结论。

## 参 考 文 献

- [1] Stroke G W. Rev Opt, 1960, **39**: 350 ~ 355
- [2] Bousquet Pavageau J. Opt Acta, 1970, **17**: 469 ~ 473
- [3] Nevieri M, Cadilhac M. Opt Commun, 1991, **3**: 345 ~ 357
- [4] Nevieri M. J Opt Soc Am, 1991, **A8**: 1468 ~ 1773
- [5] Wirgin et al. J Opt Soc Am, 1972, **A59**: 1348 ~ 1354
- [6] McPhedran R et al. Opt Commun, 1973, **3**: 331 ~ 334
- [7] Bousquet J. Opt Acta, 1962, **17**: 427 ~ 430
- [8] Huttley M C. Diffraction Gratings, 1982. 175 ~ 180
- [9] Rayleigh J W S. Proc Roy Soc, 1907, **A79**: 399 ~ 405
- [10] Abramowitz M, Stegun A. Handbook of Mathematical Function, Dover, New York: 1972. 896

## Study on Some Characteristics of Planar Holographic Sinusoidal Gratings and Blazed Gratings Used in UV Region in Theory

Wang Shuhong, Li Futian

(*State Key Laboratory of Applied Optics,*

*Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, , Changchun 130022)*

### Abstract

Diffraction efficiency of Al-coated triangle and holographic sinusoidal grating used in UV region are calculated using the differential formalism of exact electromagnetic theory. The efficiency curves of blazed characteristic of sinusoidal grating is presented. And the influence of apex angle on diffraction efficiency of triangle grating is debated.

**Key words:** Holographic sinusoidal grating, Diffraction efficiency, Blazed grating

王淑红 女, 1969 年出生, 1991 年毕业于长春光机学院, 1991 至 1994 年工作于西安应用光学研究所 (205 所), 1994 年 9 月就读于长春光机所攻读硕士学位研究生至今。主要从事短波光学的研究。