

分立式变形反射镜薄镜面的应力分析方法研究*

曾志革 凌宁

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘要 推导出变形反射镜薄镜面产生变形时的应力分布计算公式, 利用该公式, 简化的应力公式以及有限元法分别对 61 单元和 37/55 单元变形反射镜薄镜面工作时的最大应力进行了计算, 对计算结果进行了比较和分析。

关键词: 变形反射镜; 镜面应力; 有限元法

1 引言

变形反射镜(以下简称变形镜)是自适应光学技术的关键器件, 主要用于光学系统中校正系统自身或外部各种因素对光束造成的静态以及动态的波前误差^[1]。其特点是在外加力作用下, 以高分辨率快速实现光学镜面面形变化从而改变光束波前位相, 使系统成为能动可控的光学系统。

在众多种类的变形镜中, 分立式压电变形镜具有变形量大、表面变形没有间断等优点, 已广泛应用于国内外的多个自适应光学系统^[2-4]。

分立式压电变形镜结构如图 1 所示, 主要由基板、驱动器阵列和薄镜面组成。当各个驱动器随外加电压变化而产生变形时推动薄镜面产生局部变形以改变波前位相, 从而起到校正误差的作用。因此, 薄镜面的参数设计是研制变形镜的重点之一^[5-6]。薄镜面的直径厚度比较大(一般 > 30), 其合理的设计包括使之具有足够的刚性和强度以产生所需变形并

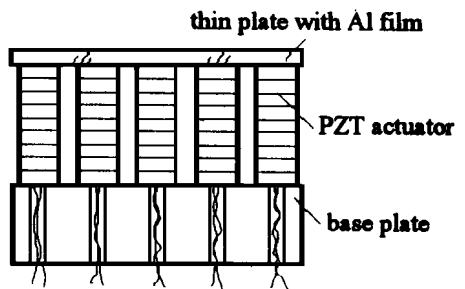


Fig. 1 The structure diagram of discrete piezoelectric deformable mirror

能尽量减少加工中的困难。这主要包括薄镜面的材料选择及物理参数的设计,以保证变形镜在正常工作条件下产生各种变形时薄镜面的最大应力必须小于其材料的许用应力。因此对薄镜面在特定参数下产生一定变形量时最大应力的计算非常重要,利用计算数值对变形镜的正常使用提供参考。

虽然在一些文献^[5-6]中曾对薄镜面的应力进行分析,但大都基于比较简单的弹性力学公式,计算结果较粗略。本文从三个方面不同角度对薄镜面的应力情况作了计算:推导出薄镜面产生一定变形量时的最大应力的计算公式,利用该公式和简化的应力计算公式以及有限元法分别对 61 单元和 37/55 单元变形镜的具体参数进行了最大应力值的计算。最后对计算结果进行了比较和分析。

对于分析变形镜面的变形量和应力分布关系,比较典型的是考虑受中心驱动器和周围第一圈驱动器的联合作用,来形成波动的镜面面表,以下的工作都是针对这种实例。

2 简化的最大应力公式计算变形镜薄镜面最大应力

当变形镜仅受一个驱动器力而产生变形时,同周围第一圈驱动器相粘联的薄镜面变形量远较中心驱动器处的变形量小,故这一圈驱动器可近似看作薄镜面的固定支撑点,因此可认为薄镜面产生的变形是基于力学中一周边固定而受中心集中载荷作用的圆盘的假设上,如图 2 所示。圆盘所受力 F 及圆盘的最大应力 σ_{\max} 力可近似表示为^[7-8]:

$$F = \frac{\delta E t^3}{0.218R^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{\max} = F \cdot \frac{0.63 \ln(R/t) + 0.68}{t^2} = \frac{[0.63 \ln(R/t) + 0.68] \delta E t}{0.218R^2} \quad (2)$$

其中, δ 是镜面最大变形量, E 为材料的弹性模量, R 为圆盘半径, t 为圆盘厚度。

实际上,由于薄镜面材料在受驱动力作用时,整个镜面都将产生弹性变形,即当一个驱动器作用在薄镜面上而其它与驱动器相关联的镜面由材料的弹性力和驱动器约束力的合力共同产生较小的局部变形。因此以边缘固定的近似条件计算变形镜薄镜面的应力值只能作为近似的参考数据。

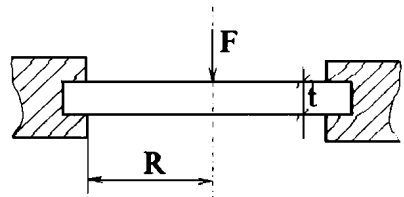


Fig. 2 Edge locked round plate suffered with concentrating center force

3 变形镜薄镜面应力的解析式推导

由于变形镜薄镜面直径厚度比较大(一般 > 30 , 且厚度一致),对它的应力分析可采用力学中圆形弹性薄板理论来准确模拟。在不同载荷和支承条件下,圆形薄板的挠度由下面的方程式给出^[9](采用圆坐标是考虑薄镜面的形状对称性):

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dy}{dr}) \right] = - \frac{Q}{D} \tag{3}$$

式中, y 是相对应于中心驱动器距离 r 处的挠度, dy/dr 是 r 处的斜率, Q 为半径 r 圆周上单位长度的作用剪力, D 是抗弯刚度, 表示为 $D = Et^3/[12(1 - \nu^2)]$, ν 为材料泊松比。

根据薄板理论^[10], 如图 3 所示, 薄镜面上 r 处单位长度的径向和切向弯矩为:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left[\frac{d\theta}{dr} + \nu \frac{\theta}{r} \right] \\ M_\theta &= D \left[\nu \frac{d\theta}{dr} + \frac{\theta}{r} \right] \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

r 处的径向和切向应力为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Eu}{(1 - \nu^2)} \left[\frac{d\theta}{dr} + \nu \frac{\theta}{r} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{Eu}{(1 - \nu^2)} \left[\nu \frac{d\theta}{dr} + \frac{\theta}{r} \right] \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

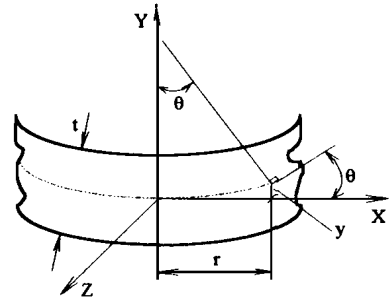


Fig 3 The principle of elastic plate

式中 u 为材料内部某一点与中层的距离。

薄镜面受中心驱动力及其变形如图 4 所示, δ_1 和 δ_2 分别为薄镜面同中心驱动器和第一圈驱动器相联结处的变形量。由于驱动器与薄镜面的接触区域为一均匀等厚的圆形平面, 受力情况可看作以下三种边界条件的组合:

当 $0 < r < R$ (此处 R 为驱动器半径) 时, 作用平面受均匀载荷 q 作用;

当 $R < r < L + R$ 时 (L 为驱动器间距), 镜面受中心集中载荷 F 作用, F 与 q 的关系可表示为: $F = q\pi R^2$ 。

设当 $r > L + R$ 时, 由于薄镜面的变形量相对中心驱动器处较小, 可近似看作 0;

对于边界条件, 在任一半径 $0 < r < R$ 处, 根据受力平衡有

$$Q \times 2\pi r = q \times \pi r^2 \Rightarrow Q = \frac{qr}{2}$$

(3) 式改写成

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dy}{dr}) \right] = - \frac{qr}{2D}$$

经积分可得:

$$\text{斜率} \quad \theta = \frac{dy}{dr} = - \frac{qr^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

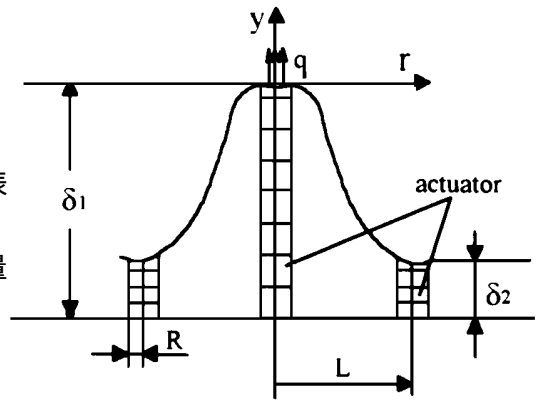


Fig 4 The deformation diagram when force F on center of plate

$$\text{挠度} \quad y_1 = -\frac{qr^4}{64D} + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

由于在板中心斜率 θ 不应无限大, 所以 $C_2 = 0$;

将坐标系取为如图 4 所示, 当 $r = 0$ 时, $y = 0$, 所以 $C_3 = 0$ 。于是, 上式可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\frac{qr^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} \\ y_1 &= -\frac{qr^4}{64D} + C_1 \frac{r^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

径向弯矩

$$M_{r1} = D \left[-\frac{qr^2}{16D} (3 + \nu) + \frac{C_1}{2} (1 + \nu) \right] \quad (7)$$

对于边界条件, 在任一半径 $R < r < L + R$ 处, 根据受力平衡有

$$Q \times 2\pi r = F \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{F}{2\pi r}$$

(3) 式改写成

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dy}{dr}) \right] = -\frac{F}{2\pi r D}$$

经积分可得

$$\text{斜率} \quad \theta = \frac{dy}{dr} = -\frac{F}{2\pi D} \left[\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right] + C_4 \frac{r}{2} + \frac{C_5}{r}$$

$$\text{挠度} \quad y_2 = -\frac{FR^2}{8D} [\ln r - 1] + C_4 \frac{r^2}{4} + C_5 \ln r + C_6$$

$$\text{径向弯矩} \quad M_{r2} = D \left\{ -\frac{F}{8\pi D} [2(1 + \nu) \ln r + 1 - \nu] + \frac{1 + \nu}{2} C_4 - \frac{1 - \nu}{r^2} C_5 \right\} \quad (8)$$

设当 $r = R$ 时, 以上两种情况下的斜率 θ 挠度 y 和径向弯矩 M_r 相等, 有

$$\theta = \theta \quad (9)$$

$$y_1 = y_2 \quad (10)$$

$$M_{r1} = M_{r2} \quad (11)$$

在边界条件下当 $r = L - R$ 时的挠度 $y = -y_{\max} = -(\delta_1 - \delta_2)$, 即

$$-(\delta_2 - \delta_1) = -\frac{FR^2}{8\pi D} [\ln l - 1] + C_4 \frac{l^2}{4} + C_5 \ln l + C_6 \quad (12)$$

联立 (9) (10) (11) (12) 可解得 C_1, C_4, C_5, C_6 , 其中:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{F}{4\pi D} \left(2 \ln \frac{1}{R} - 1 \right) - \frac{4(\delta_2 - \delta_1)}{l^2} + \frac{FR^2}{16\pi D l^2} \left(5 + 4 \ln \frac{1}{R} \right) \\ &= -\frac{F}{4\pi D} \left(2 \ln \frac{L - R}{R} - 1 \right) - \frac{4(\delta_2 - \delta_1)}{(L - R)^2} + \frac{FR^2}{16\pi D (L - R)^2} \left(5 + 4 \ln \frac{L - R}{R} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

中心驱动器对薄镜面的作用力 F 可通过下列方法求出。由于中心驱动器与薄镜面的接触面积远小于第一圈驱动器包围的薄镜面面积, 因此边界条件可近似看作中心集中载荷对薄

镜面的作用。当加入此时的边界条件——薄镜面中心点和第一圈驱动器接触面对变形量的约束,可得到中心作用力 F 和最大变形量 $(\delta_2 - \delta_1)$ (峰谷值)的关系为:

$$(\delta_2 - \delta_1) = \frac{3FR_m^2}{4\pi Et^3}(1 - \nu^2)$$

此时 R_m 为相对于变形量 $(\delta_2 - \delta_1)$ 峰谷值两点的间距,即 $R_m = L - 2R$, 故

$$F = \frac{4\pi Et^3(\delta_2 - \delta_1)}{3R_m^2(1 - \nu^2)} = \frac{4\pi Et^3(\delta_2 - \delta_1)}{3(L - R)^2(1 - \nu^2)} \quad (14)$$

将 F 和 C_1 的解析式分别代入两种边界条件下的应力计算公式(5),在边界条件 时,最大应力值发生在 r 为最大之处即 $r = R$ 处的薄镜面两个表面;边界条件 时最大应力值发生在 r 值小时,也即是 $r = R$ 处的薄镜面两个表面。即当 $r = R, u = t/2$ 时,最大应力值为:

$$\sigma_{\max} = \frac{Et}{2(1 - \nu^2)} \left[-\frac{3 + \nu_F}{16TD} + \frac{1 + \nu_{C_1}}{2} \right] \quad (15)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Et}{2(1 - \nu^2)} \left[-\frac{3\nu + 1}{16TD} + \frac{1 + \nu_{C_1}}{2} \right] \quad (16)$$

从(13~ 16)的联立分析中可以看到,薄镜面产生变形时的最大应力同最大变形量成正比,最大应力将出现在产生最大变形量的薄镜面与驱动器连接域的边缘。

4 有限元法计算两种变形镜的最大应力

对于复杂的结构的应力分布情况,采用有限元法来计算是非常有效的方法,可以为复杂结构参数预估、选择、检验以及优化等提供科学依据。

4.1 有限元法的基本计算步骤

连续介质的有限元法分析包括以下几个步骤^[10- 11]:

用虚拟的直线把原介质分割成有限个单元,直线是单元的边界,交点称为结点;

假定各单元在结点上互相较结,结点位移 ω 是基本未知量,直角坐标系 xyz ;

选择一个函数,用单元结点的位移唯一地表示单元内任一点的位移,此函数称为位移函数;

通过位移函数,用结点位移唯一地表示单元内任一点的应变。再利用虎克定律,用结点位移唯一地表示单元内任一点应力;

利用能量守恒原理,找到与单元内部应力状态等效的结点力。再利用单元应力与结点位移的关系,建立等效结点力与结点位移的关系;

将每个单元所承受的荷载,按静力等效原则移置到结点上;

在每个单元上建立用结点位移表示的静力平衡方程,得到一组线性方程组。解出这个方程组,求出结点位移,即可求出每个单元的应力(两个主应力和一个剪应力)。

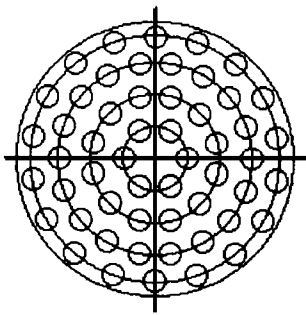
$$\sigma_x = - \frac{E\mu}{(1 - \nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \sigma_y = - \frac{E\mu}{(1 - \nu^2)} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \tau_{xy} = - \frac{E\mu}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

4.2 应用举例

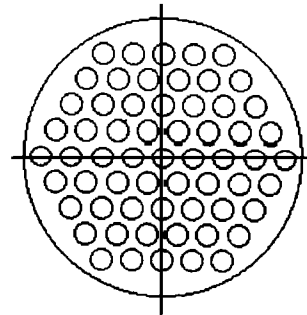
变形镜镜面的最大应力主要由薄镜面的物理参数、产生的最大变形量以及驱动器排布位置共同决定。在此选用 61 单元和 37/55 单元两种变形镜薄镜面作为示例,用 Algor Feas 有限元软件包对这两块变形镜薄镜面进行计算和分析。材料的性能参数和驱动器排布方式分别见表 1 和图 5。

Table 1 Characteristic properties of material (unit mm)

deformable mirror	mirror diameter	mirror thickness	actuator arrangement	actuator distance	actuator diameter	maximum deformation	Young's modulus (Pa)	density (kg/m ³)	Poisson's ratio
61-actuator	Φ150	3	triangle	16.4	12	± 3 μm	7.144 × 10 ¹⁰	2.53 × 10 ³	0.211
37/55-actuator	Φ120	3	radius	14.0	10	± 1.5 μm	7.144 × 10 ¹⁰	2.53 × 10 ³	0.211



(a) 37/55-actuator DM



(b) 61-actuator DM

Fig 5 Diagram of actuator arrangement of two deformable mirror

由于两块薄镜面的直径厚度比较大, 计算中采用二维薄板理论来近似。为准确建立薄镜面的计算模型, 采用了计算精度较高的四边形单元^[13]。以 61 单元变形镜为例, 图 6 为其有限元计算模型, 共划分了 2684 个单元和 2876 个节点。

对 61 单元变形镜在仅有中心驱动器施加作用力时应力分布的有限元法计算结果如图 7 所示:

从图 7 中可看到, 最大应力出现在薄镜面与中心驱动器连接域的边缘, 这同理论分析相符合。

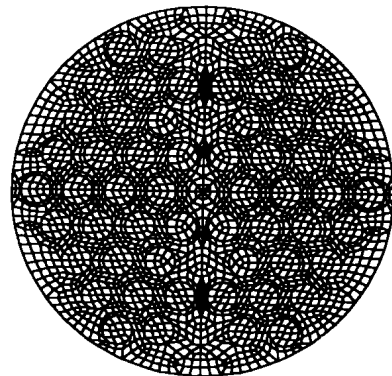


Fig 6 FEM module of 61-actuator deformable mirror

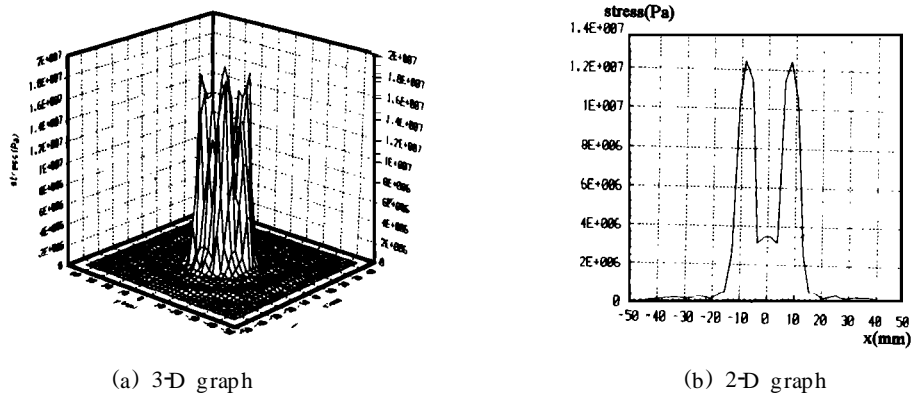


Fig 7 The diagram of stress distribution for 61-actuator DM

5 三种方法的计算结果

采用近似计算公式(2)、推导的公式(15)(16)以及有限元法对 61 单元和 37/55 单元两种变形镜的下列两种变形情况的最大应力分别进行了计算:

1、中心驱动器变形量如表 1 所示 δ , 第一圈驱动器的变形仅由于薄镜面的弹性变形而引起 $\beta\delta$ (其中 β 为该变形镜驱动器的交连值, 取 $\beta = 8.5\%$);

2、中心驱动器变形量如表 1 所示 δ , 第一圈驱动器变形量为 $-\delta$ 。

计算结果如表 2 所示。

Table 2 The calculation results of three methods

deformable mirror		37/55DM	37/55DM	61DM	61DM
center-actuator deformation (μm)		+ 1.5%	+ 1.5	3.0	+ 3.0
the 1st-circle-actuator deformation (μm)		+ 1.5 $\times \beta$	- 1.5	+ 3.0 $\times \beta$	- 3.0
maximum stress value (Pa)	formula (2)	2.4768×10^7	4.9962×10^7	3.9560×10^7	7.9799×10^7
	formula (13)	1.8187×10^7	3.9752×10^7	3.1025×10^7	6.904×10^7
	FEM	1.7401×10^7	3.8035×10^7	3.085×10^7	6.744×10^7
permitt stress ^[14] (Pa)		$6 \sim 8 \times 10^7$	$6 \sim 8 \times 10^7$	$6 \sim 8 \times 10^7$	$6 \sim 8 \times 10^7$

从上述的计算公式中和计算结果可以得到以下几点结论:

当仅有中心驱动器的作用使薄镜面产生变形时, 与第一圈驱动器相连接的镜面由于其材料本身的弹性和驱动器的箝约束引起的变形量为 $\beta\delta$, 薄镜面的最大应力同 $(1 - \beta)\delta$ 成正比;

当中心驱动器和第一圈驱动器均有外加力而同时产生变形时,最大应力同变形量的峰值- $(\beta_1 - \beta_2)$ 成正比;

简化计算公式的计算结果同后两种方法的结果差异较大,其数值不太可靠;

推导出的计算式和有限元法的计算结果非常接近,同实际使用结果也相符,因此这两种方法是实用的计算薄镜面最大应力的方法。其中,推导的解析式具有简单的表达式,只需编制一段简短的程序就可在微机上实现。有限元法利用了现代微机的CAD技术,其计算结果具有可视性,可通过微机来显示薄镜面上任一点的应力状况;

61 单元变形镜当中心驱动器和第一圈驱动器同时产生最大变形量时,薄镜面的最大应力已超过了材料的许用应力(安全起见,取 $[\sigma] = 6.0E7\text{Pa}$)。实际上,该变形镜在工作中曾出现过薄镜面破裂的现象,经返修已工作正常。计算的37/55单元变形镜的最大工作应力小于许用应力,实际中也确实经历了长期使用的考验。

6 结 语

由于简略的应力计算公式(2)是通过不太准确的边界条件得到,计算结果同实际有差异。推导出的计算式具有简单明了而且计算结果较准确的特点,有限元法虽然建立模型和计算过程比较复杂,但对计算较复杂的结构和观察薄镜面的连续变化等方面则具有很大的优点。因此,在研制变形镜的薄镜面时可通过解析计算式和有限元法这两种方法结合起来对其性能作一个较准确的估计。对变形镜的设计具有比较重要的指导作用。

本工作的完成得到姜文汉老师的指导和帮助,在此致以谢意。

参 考 文 献

- [1] Hardy J W, Lefebvre J E, Koliopoulos C L. Real Time Atmospheric Compensation. JO SA, 1977, 67(3): 360 ~ 369
- [2] 姜文汉, 黄树辅, 吴旭斌. 爬山法自适应光学波前校正系统. 中国激光, 1987, 15(1): 17~ 21
- [3] Gaffard J P. Very Large Telescopes and Their Instrumentation. ESO Conference, Garching, 729, 1988
- [4] Everson J H, Aldrich R E, Albertinetti N P. Discrete Actuator Deformable Mirror. Opt Engr, 1981, 20(2): 316~ 324
- [5] Ealey Mark A, Welman John. Fundamentals of Deformable Mirror Design and Analysis. Proc SPIE, 1989, 1161: 66~ 84
- [6] 徐灏主编. 机械设计手册. 北京: 机械工业出版社, 1991
- [7] 凌宁等. 变形反射镜的发展. 北京: 光电工程, 1995, 22(1): 14~ 22
- [8] 赫恩 E J(英). 材料力学. 北京: 人民教育出版社, 1991
- [9] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 北京: 水利电力出版社, 1979
- [10] 曾志革, 凌宁. 能动薄主镜技术模拟研究. 强激光与粒子束, 1996, 8(1): 88~ 94
- [11] 李士贤, 郑乐年. 光学设计手册. 北京: 北京理工大学出版社, 1990
- [12] 朱以文等. 有限元专用CAD系统ViziCad及其使用. 北京四通集团, 1991
- [13] 张云兰, 杜万程. 非金属材料. 北京: 中国农业机械出版社, 1983

Research of Analysis Method for Stress of Discrete Deformable Thin Mirror

Zeng Zhige, Ling Ning

(Institute of Optics & Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

Abstract

In this paper, stress distribution formulas of deformable thin mirror are gotten. By using these formulas, simplified formulas and Finite Element Method (FEM), the stresses of two types of deformable mirrors (61-actuator and 37/55-actuator) are calculated, the results are compared and analyzed.

Keywords: Deformable mirror, Stress analysis, Finite Element Method (FEM)

曾志革 男, 1967 年 5 月出生, 1994 年 7 月中科院光电技术研究所自适应光学专业硕士研究生毕业, 现正攻读自适应光学专业博士学位, 主要从事能动(自适应)光学器件的研究工作。