晶格原子与光场强相互作用体系的元激发——能级激元*

段路明 郭光灿
(中国科技大学物理系, 合肥 230026)

摘要 光场与窄能带晶体的强耦合体系被发现存在一种新型的元激发——能级激元。我们分析了该元激发的能谱及一些性质。并提出通过控制光场的状态来实现能级激元的态制备。

关键词: 元激发; 光场; 强耦合体系; 晶格原子

1 引 言

在处理光与固体相互作用时, 传统的作法多对光场采用经典描述[1,2]或者把固体当作一个经典介质[3,4]。但有些这类现象的描述, 却必须采取全量子理论, 超荧光即是一个例子。因此本文将用全量子理论来分析量子光场对晶格原子的激发。结果发现, 在强耦合条件下系统将会出现一种新型的元激发——能级激元。而该元激发的引入将会在考虑光与固体强耦合时起本质的作用。本文考虑原子间距较大的晶体, 此时原子间相互作用很弱, 这也就是通常所说的类晶气体[5], 实验上已制备出这种类型的晶体[6]。该晶体能带很窄, 各原子外层电子近似可用原子能级来描述。通常关心光场引起两能级间电子的跃迁, 此时可采取二能级近似。当晶体一个格点原子上电子被光场激发到上能级, 它可以通过辐射光子回到下能级, 而辐射出的光子又可被其它原子上的电子吸收而跃迁到上能级。本文表明这种作用过程必然导致一种整体元激发, 即能级激元。我们用全量子理论来描述系统, 得出了系统能级激元的结构, 并分析了其一些统计性质。最后还考虑了利用一定状态的光场来制备和控制能级激元的状态。

收稿日期: 1996年8月30日
* 国家自然科学基金和攀登计划资助课题

2　光场与晶体的耦合模——能级激元

对很窄能带的晶体各格点原子能级基本独立,而二能级原子体系与辐射场相互作用的哈密顿量为[7]

$$H = \hbar[\omega\sum_l S_l^z + \sum_k \omega_k \alpha_k^+ \alpha_k + \sum_l \sum_k g_k(\alpha_k^+ S_l^- e^{-ik\cdot R_l} + h.c.)] \tag{1}$$

其中 $\sum_l$ 为对晶格格点求和, $\sum_k$ 为对光场模式求和,晶体中,波矢 $\boldsymbol{k}$ 须满足周期性条件,即 $\boldsymbol{k} = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i \boldsymbol{b}_i}{N_i}$, $\boldsymbol{b}_i$ 为倒格矢, n_i 为整数, N_i 为沿 $\boldsymbol{b}_i$ 方向的格点数, $N = N_1N_2N_3$ 为总格点数。对尺度远大于光波波长的晶体, $\boldsymbol{k}$ 近似连续。式中 $\omega = E_A - E_F$ 为二能级能量差, $\omega_k = |\boldsymbol{k}|\cdot c$ 为 $\boldsymbol{k}$ 模光频率, g_k 为 $\boldsymbol{k}$ 模光场与 $\boldsymbol{l}$ 格点原子的耦合常数,因各格点原子相同,故 g_k 不信赖于 $\boldsymbol{l}$。$S_l^\pm, S_l^z$ 为自旋1/2的自旋算符, α_k 为 $\boldsymbol{k}$ 模光消灭算符。该哈密顿量亦用于描述超辐射。现在我们来分析此体系基态及低激发态特性。

显然系统基态为光场处于真空态且所有原子处于下能级,即在 S_l^z 为 $-1/2$ 的本征态。为分析其激发态特性,引入如下变形的 Holstein-Primakoff 变换[8],该变换在铁磁理论中常用。

$$S_l^+ = b_l^+ \sqrt{1 - b_l^+ b_l} \tag{2}$$

$$S_l^- = \sqrt{1 - b_l^+ b_l}\, b_l \tag{3}$$

$$S_l^z = b_l^+ b_l - \frac{1}{2} \tag{4}$$

由 $S_l^\pm, S_l^z$ 的对易式,易证 b_l^+, b_l 满足标准玻色算符对易式:

$$[b_l, b_{l'}^+] = \delta_{ll'} \tag{5}$$

S_l^z 的本征值为1/2, $-1/2$的本征态分别对应粒子数 $b_l^+ b_l$ 的本征值为1, 0的本征态。

将变换(2)(3)(4)代入哈密顿量(1),则哈密顿量完全用玻色算符表示出来。对于低激发态,晶体中处于上能级原子数远小于格点数 N,因而每个原子处于上能级的几率 $\langle b_l^+ b_l\rangle \ll 1$,在该近似下,系统哈密顿量简化为

$$H = \hbar[-\frac{1}{2}N\omega + \omega\sum_l b_l^+ b_l + \sum_k \omega_k \alpha_k^+ \alpha_k + \sum_l \sum_k g_k(\alpha_k^+ b_l e^{-ik\cdot R_l} + hc)] \tag{6}$$

引入变换

$$C_k = N^{-\frac{1}{2}} \sum_l b_l e^{-ik\cdot R_l} \tag{7}$$

利用晶格求和关系式[8]

$$\frac{1}{N}\sum_l e^{i(k-k')\cdot R_l} = \delta_{kk'} \tag{8}$$

得 C_k 仍满足对易关系:

$$[C_k, C_{k'}^+] = \delta_{kk'} \tag{9}$$

将变换(7)代入哈密顿量(6),得:

$$H = \hbar\{[-\frac{1}{2}N\omega + \sum_k[\omega_k\alpha_k^+\alpha_k + C_k^+C_k + g_k\sqrt{N}(\alpha_k^+C_k + \alpha_k C_k^+)]\} \tag{10}$$

变换(7)揭示出能级的激发不是固定在某单个原子上,而是以一种波的形式在晶体中存在,这

是一种集体激发，可称为能级波。哈密顿量(10)表明，$\boldsymbol{k}$ 模能级波与 $\boldsymbol{k}$ 模光场发生偶合，而不同 $\boldsymbol{k}$ 的能级波与光场没有相互作用。

为求出系统的元激发能谱，需进一步将哈密顿量对角化。引入如下变换

$$\alpha_k = \cos\theta_k \alpha_k + \sin\theta_k C_k \tag{11}$$

$$\beta_k = -\sin\theta_k \alpha_k + \cos\theta_k C_k \tag{12}$$

显然 α_k 和 β_k 仍满足标准玻色对易子

$$[\alpha_k, \alpha_k^{+}] = [\beta_k \beta_k^{+}] = \delta_{kk'} \tag{13}$$

将代换式(11)(12)代入哈密顿量(10)，并选择 θ_k 满足：

$$\tan(2\theta_k) = \frac{2\sqrt{N}g_k}{\omega_k - \omega} \tag{14}$$

此时非对角项被消去，哈密顿量简化为：

$$H = -\frac{N}{2}\hbar\omega + \sum_k (\hbar\Omega_{1k}^{+}\alpha_k^{+}\alpha_k + \hbar\Omega_{2k}^{-}\beta_k^{+}\beta_k) \tag{15}$$

其中

$$\Omega_{1k}^{+} = \omega_k\cos^2\theta_k + \omega\sin^2\theta_k + \sqrt{N}g_k\sin(2\theta_k) \tag{16}$$

$$\Omega_{2k}^{-} = \omega_k\sin^2\theta_k + \omega\cos^2\theta_k - \sqrt{N}g_k\sin(2\theta_k) \tag{17}$$

由此可见，晶体中存在两支非简并的光场能级耦合波模。其色散关系即 $\Omega_k^{\pm}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的关系式由(16)(17)式给出。

3 能级激元的一些性质

一般情况下(16)(17)式给出的能级激元的色散关系比较复杂，我们考虑两种较简单情况。

在共振情况下，即 $\omega_k = \omega$ 时，$\Omega_k^{\pm} = \omega \pm \sqrt{N}g_k$，光场与原子的耦合系数 $\sqrt{N}g_k$ 决定于原子的偶极矩和晶体原子数密度。通常 $\sqrt{N}g_k \ll \omega$，但当原子偶极矩显著增大时(如强光场引起较大的诱导偶极矩)，光场原子的耦合很强，此时能级激元的能级相对于原子能级发生分裂，因而产生可观的物理效应。能级激元能级对称排列原子能级两侧，其能级间隙为 $2\sqrt{N}g_k$。

在长波极限，即 $\omega_k = |\boldsymbol{k}|c \ll \omega$，注意到耦合常数 g_k 可分解为 $g_k = g_0\sqrt{\omega_k}$，其中 g_0 不依赖于 $\boldsymbol{k}$，，(16)(17)式简化为

$$\Omega_k^{+} \approx (1 - \frac{Ng_0^2}{\omega}) \cdot |\boldsymbol{k}| \cdot c \tag{18}$$

$$\Omega_k^{-} \approx (\omega + \frac{3Ng_0^2}{2\omega}) \cdot |\boldsymbol{k}| \cdot c \tag{19}$$

其长波色散关系 $\Omega_k^{+} \propto \boldsymbol{k}$，因而与声子一样，其低温比热将正比于 T^3。

由能级激元频谱还可以分析格点原子能级下降算符的时间演化。利用变换(7)(11)(12)的逆变换及哈密顿量(15)得 $\boldsymbol{l}$ 格点算符

$$b_l = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k [\sin(\theta_k)\alpha_k(0)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_l - \Omega_k^{+}t)} + \cos(\theta_k)\beta_k(0)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_l - \Omega_k^{-}t)}] \tag{20}$$

它由晶体中两组速度不同的行波构成。初始时, l_0格点原子处于上能级, 其它格点原子均在下能级且光场为真空态, t 时刻 l 格点原子处于上能级几率为

$$\langle b_l^{\dagger} b_l\rangle = \left|\frac{1}{N}\sum_{k}\left[\sin^2\theta_k e^{i\Omega_k^{+} t} + \cos^2\theta_k e^{-i\Omega_k^{-} t}\right] e^{-ik\cdot(R_l - R_{l_0})}\right|^2 \tag{21}$$

它由许多频率不同的随时间振荡的因子叠加构成, 该几率将会出现崩坍复原现象。

4 能级激元的态制备

能级激元是一种光场与能级波的耦合模, 我们可以通过控制光场的状态, 来制备各种状态的能级激元。设初始时格点原子全部处于下能级, 即 C_k 均在真空态, 如输入 k 模相干态光场 $|\alpha\rangle$, 则由(12) 式不难得出能级激元 α_k, β_k 将分别处于相干态 $|\cos\theta_k\alpha\rangle$, $|-\sin\theta_k\alpha\rangle$, 一般情况下, 能级激元的正规特征函数可由下式与光场的正规特征函数联系起来。

$$\chi^{(n)}(\xi;\alpha_k) = \langle e^{i\xi^{*}\alpha_k^{+}} e^{i\xi\alpha_k}\rangle = \chi^{(n)}(\cos(\theta_k)\xi;\alpha_k) \tag{22}$$

$$\chi^{(n)}(\xi;\beta_k) = \chi^{(n)}(-\sin(\theta_k)\xi;\alpha_k) \tag{23}$$

如输入光场处于非经典态, 象输入粒子数压缩态或正交位相分量压缩态光场, 则可相应制备能级激元的粒子数, 或正交位相分量压缩态。定义 Mandel Q 因子 $Q = \frac{\langle(\Delta n)^2\rangle - \langle n\rangle}{\langle n\rangle}$, 和正交位相分量

$$X(\alpha_k;\theta) = \frac{1}{2}(\alpha_k e^{-i\theta} + \alpha_k^{+} e^{i\theta}) \tag{24}$$

利用(22) (23) 式可以把能级激元的 Q 因子及正交位相分量的压缩用输入光场 Q 因子及正交位相压缩表示出来

$$Q(\alpha_k) = \cos^2\theta_k Q(\alpha_k) \tag{25}$$

$$\langle[\Delta X(\alpha_k;\theta)]^2\rangle - \frac{1}{4} = \cos^2(\theta_k)\{\langle[\Delta x(\alpha_k;\theta)]^2\rangle - \frac{1}{4}\} \tag{26}$$

对能级激元 β_k 也有类似的关系式, 只须将上式中的 $\cos^2\theta_k$ 代以 $\sin^2\theta_k$ 上式表示, 只要输入光场的 Q 因子和正交位相分量压缩不为0, 能级激元即能获得粒子数和正交位相分量压缩。相比于原输入光场, 能级激元的压缩度减小, 亦即更趋近于相干态。

类似上面的分析, 还可以通过控制光场来制备其它各种能级激元的非经典态。因此, 能级激元概念的引入, 为分析光场与晶体的强耦合体系的性质提供了很大的便利。

参 考 文 献

[1] 沈元壤, 顾士杰译. 非线性光学原理. 北京: 科学出版社, 1987

[2] Vrehen Q H F, Gibbs H M. Superflurescence Optics. Springer-Verlag, 1982

[3] Glauber R J, Lewenstein M. Quantum Optics of Dielectric Media. Phys Rev, 1991, **A43**: : 467～491

[4] Santos D J, Loudon R. Electromagnetic Field Quantization in Inhomogeneous and Dispersive One-dimensional Systems. Phys Rev, 1995, **A52**: 1538～1549

[5] 郭光灿,吴志兵.类晶气体的共振荧光.物理学报,1995,**44**(7):1042～1050;
Ling Tian, Guo Guang-can. Superradiance Effect og the Crystal-like-gas. Acta Physica Sinica(Overseas Edition),1996,**5**(1):15～24
[6] Hemmerich A, Hansch T W. Phys Rey Lett, 1993, **70**:410
[7] 郭光灿.量子光学.北京:高等教育出版社,1990
[8] 李正中.固体理论.北京:高等教育出版社,1985

Elementary Excitations in the Strong-coupled System of the Optical Field and Lattice Atoms-energy-level-excitation

Duan Luming, Guo Guangcan
(*Dept. of Physics, USTC. Hefei* 230027)

Abstract

The strong-coupled systems of the optical field and the narrow-band crystals are found to exist a new kind of elementary excitation-energy-level-excitation. The energy spectrum and some other properties of this exciation are analysed and some kinds of states of the excitation are prepared by controling the states of the incident optical field.

Key words: Elementary excitations, Optical field, Lattice atoms, Strong-coupled system

段路明　男,1972年8月出生。1994年毕业中国科技大学物理系,获学士学位。现参加硕博连读,攻读博士学位。自1994年以来,已完成论文16篇,在国内外一流杂志发表论文10篇。