

三点法圆度测量精度分析

张宇华

(北京理工大学光电工程系 北京 100081)

王晓林

(山东工业大学机械工程学院 济南 250061)

摘要 详细分析了三点法中测头的读数及角位置误差对圆度测量精度的影响。从三点法的原理出发,根据误差理论,推导了测头及位置误差在圆度测量过程中的误差传播关系式。结果表明:三点法圆度测量结果失真的根本原因在于三个测头间的夹角选择不当,使测头读数误差在某些谐波上被大大放大。为提高三点法圆度测量精度,必须恰当选择三个测头间的夹角,以使读数误差对圆度各次谐波测量结果的影响都较小。

关键词 三点法 圆度 测量 误差

为提高三点法测量圆度及轴系运动误差的精度,前人倾注了很大精力,但他们研究的注意力大都限于仅从数学上考虑了如何避免三点法的谐波加权函数 $\omega(k) = 1 + a_2 e^{-jk\varphi_2} + a_3 e^{-jk\varphi_3}$ 的谐波抑制问题^[1-3],而忽视了测头的读数及定位误差对测量精度的影响。事实上,仅有完善的理论算法而不考虑实际测量中存在的测量误差影响,是无法从根本上保证获得高精度测量结果的。虽有个别文献^[4]注意到上述问题,但未能对测头读数及定位误差对圆周各点测量精度的影响作出透彻分析。针对上述问题,本文从三点法的原理出发,根据误差理论,详细分析测头读数及定位误差对圆度各次谐波及圆周各点测量结果的影响,从而为进一步提高三点法测量精度奠定基础。

1 三点法测量原理

如图1,工件圆周上布置3个测头 P_i ($i = 1 \sim 3$),各测头与 y 轴夹角分别为 φ_i ($\varphi = 0$),工件圆度为 $r(\theta)$,轴系径向运动误差的 x, y 向分量为 $x(\theta), y(\theta)$,各测头的输出为:

$$S_i(\theta) = R_i - r(\theta - \varphi) - y(\theta) \cos \varphi + x(\theta) \sin \varphi \quad (1)$$

其中, R_i 为测头 P_i 的零起读数, θ_i 为采样点, $\theta_i = n \cdot 2\pi/N$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ 。

构造线性方程

$$S_0(\theta) = S_1(\theta) + a_2 S_2(\theta) + a_3 S_3(\theta) \quad (2)$$

将 $r(\theta)$ 展开为 Fourier 级数

$$r(\theta) = r_0 + \sum_{k=1}^{K_m} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \quad (3)$$

设

$$\alpha_k = 1 + a_2 \cos k\varphi + a_3 \cos k\varphi \quad (4)$$

$$\beta_k = a_2 \sin k\varphi + a_3 \sin k\varphi \quad (5)$$

则

$$S_0(\theta) = R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 - r_0(1 + a_2 + a_3) - a_1 y(\theta) + \beta_1 x(\theta) - [(A_k \alpha_k - B_k \beta_k) \cos k\theta + (B_k \alpha_k + A_k \beta_k) \sin k\theta] \quad (6)$$

为分离 $x(\theta)$ 、 $y(\theta)$, 使^{k=2}

$$\alpha_k = 1 + a_2 \cos k\varphi + a_3 \cos k\varphi = 0 \quad (7)$$

$$\beta_k = a_2 \sin k\varphi + a_3 \sin k\varphi = 0 \quad (8)$$

将 $S_0(\theta)$ 展开为 Fourier 级数

$$S_0(\theta) = S_{n0} + \sum_{k=1} (F_k \cos k\theta + G_k \sin k\theta) \quad (9)$$

则

$$A_k = -(\alpha_k F_k + \beta_k G_k) / (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \quad (10)$$

$$B_k = (\beta_k F_k - \alpha_k G_k) / (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \quad (11)$$

由此得到工件圆度, 其中 k_m 为谐波最高级次。

2 三点法测量系统精度分析

由式(10)及(11)得:

$$\delta(A_k) = -\frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(F_k) - \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(G_k) - \frac{\beta_k B_k + \alpha_k A_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\alpha_k) - \frac{\beta_k A_k - \alpha_k B_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\beta_k) \quad (12)$$

$$\delta(B_k) = \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(F_k) - \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(G_k) + \frac{\beta_k A_k - \alpha_k B_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\alpha_k) - \frac{\alpha_k A_k + \beta_k B_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\beta_k) \quad (13)$$

影响测圆精度的误差有两个, (1) 测头读数误差, 它影响 F_k 、 G_k ; (2) 测头角位置误差, 它影响 α_k 、 β_k 。

2.1 测头读数误差对测量精度影响

2.1.1 读数误差对圆度各次谐波测量精度影响

此时, 忽略测头角位置误差对测量结果的影响, 设三个测头的读数误差为 δ_{1n} 、 δ_{2n} 、 δ_{3n} 。

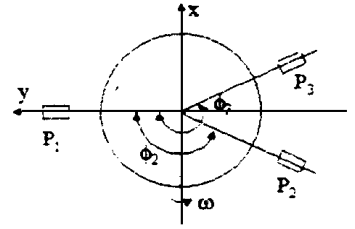


Fig 1 The principle of three-point method

这样

$$\begin{aligned} \delta(A_k) &= -\frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(F_k) - \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(G_k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [-2 \frac{\alpha_k \cos k\theta_n + \beta_k \sin k\theta_n}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} (\delta_{1n} + a_2 \delta_{2n} + a_3 \delta_{3n})] \end{aligned} \quad (14)$$

设

$$C_n = -2 \frac{\alpha_k \cos k\theta_n + \beta_k \sin k\theta_n}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} (\delta_{1n} + a_2 \delta_{2n} + a_3 \delta_{3n}) = \lambda_n (\delta_{1n} + a_2 \delta_{2n} + a_3 \delta_{3n}) \quad (15)$$

则

$$\delta(A_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} C_n \quad (16)$$

因为 δ_{1n} 、 δ_{2n} 、 δ_{3n} 为随机变量, 所以 C_n 也为随机变量。由随机变量方差与数字期望的关系^[5]得

$$\sigma^2(A_k) = \frac{1}{N} \sum_{n_i=0}^{N-1} \sum_{n_j=0}^{N-1} E[(C_{n_i} - EC_{n_i})(C_{n_j} - EC_{n_j})] \quad (17)$$

式中, E 表示求数学期望, 设三个测头的方差均为 σ^2 , 其数学期望均为 0, 则由式(15)得 $EC_{n_i} = EC_{n_j} = 0$, 那么, 式(17)化简为

$$\sigma^2(A_k) = \frac{1}{N} \sum_{n_i=0}^{N-1} \sum_{n_j=0}^{N-1} E(C_{n_i} C_{n_j}) \quad (18)$$

因为 δ_{1n} 、 δ_{2n} 、 δ_{3n} 为相互独立的随机变量, 所以

$$\text{当 } n_i \neq n_j \text{ 时, } E(C_{n_i} C_{n_j}) = \lambda_{n_i} \lambda_{n_j} (E\delta_{1n_i} + a_2 E\delta_{2n_i} + a_3 E\delta_{3n_i})(E\delta_{1n_j} + a_2 E\delta_{2n_j} + a_3 E\delta_{3n_j}) = 0$$

$$\text{当 } n_i = n_j \text{ 时, } E(C_{n_i} C_{n_j}) = \lambda^2 E(\delta_{1n} + a_2 \delta_{2n} + a_3 \delta_{3n})^2 = \lambda^2 (1 + a_2^2 + a_3^2) \sigma^2$$

综合上述两种情况, 由读数误差引入的圆度 k 次 Fourier 系数 A_k 的测量误差的方差为

$$\sigma^2(A_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\lambda^2 (1 + a_2^2 + a_3^2) \sigma^2] = 2 \cdot \frac{1 + a_2^2 + a_3^2}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \sigma^2 \quad (19)$$

同理得

$$\sigma^2(B_k) = \sigma^2(A_k) \quad (20)$$

2.1.2 读数误差对圆周各点测量精度的影响

将 A_k 、 B_k 、 F_k 、 G_k 代入(3), 整理得

$$r(\theta_p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2}^{k_m} [s_1(\theta_n) + a_2 s_2(\theta_n) + a_3 s_3(\theta_n)] \omega(n)$$

其中 $\omega(n) = 2 \sin[\nu + k(\theta_n - \theta)] / \sqrt{a_k^2 + \beta_k^2}$, $\tan \nu = -\alpha_k / \beta_k$, $\theta \cdot 2\pi/N$, $p = 0, 1, \dots, N-1$ 。当 $s_1(\theta_n)$ 、 $s_2(\theta_n)$ 、 $s_3(\theta_n)$ 存在测量误差 δ_{1n} 、 δ_{2n} 、 δ_{3n} 时, 引入 $r(\theta_p)$ 测量误差为

$$\delta(r_p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2}^{k_m} (\delta_{1n} + a_2 \delta_{2n} + a_3 \delta_{3n}) \omega(n) \quad (21)$$

同 $\sigma^2(A_k)$ 的分析, 由测头读数误差引入的圆周第 p 点的圆度测量误差的方差为

$$\sigma^2(r_p) = \frac{4}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2}^{k_m} \left\{ \sqrt{\frac{1 + a_2^2 + a_3^2}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}} \sin[\nu + k(\theta_n - \theta)] \right\}^2 \quad (22)$$

设 $q_k = \sqrt{(1 + a_2^2 + a_3^2) / (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}$, q_k 是表示读数误差对测量精度影响大小的重要指标。

2.2 测头角位置误差对测量精度影响

此时, 忽略读数误差

$$\delta(A_k) = - \frac{\beta_k B_k + \alpha_k A_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\alpha_k) - \frac{\beta_k A_k - \alpha_k B_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\beta_k) \quad (23)$$

$$\delta(B_k) = \frac{\beta_k A_k - \alpha_k B_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\alpha_k) - \frac{\alpha_k A_k + \beta_k B_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \delta(\beta_k) \quad (24)$$

其中

$$\delta(\alpha_k) = -k[a_2 \sin k\varphi \cdot \delta(\varphi) + a_3 \sin k\varphi \cdot \delta(\varphi)] \quad (25)$$

$$\delta(\beta_k) = k[a_2 \cos k\varphi \cdot \delta(\varphi) + a_3 \cos k\varphi \cdot \delta(\varphi)] \quad (26)$$

由 $C_k^2 = A_k^2 + B_k^2$ 得第 k 次谐波的幅值相对误差

$$\begin{aligned} \frac{\delta(C_k)}{C_k} &= - \frac{\alpha_k \delta(\alpha_k) + \beta_k \delta(\beta_k)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\ &= - \frac{ka_2[\sin k\varphi - a_3 \sin(k\varphi - \varphi)]\delta(\varphi)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} - \frac{ka_3[\sin k\varphi + a_2 \sin(k\varphi - \varphi)]\delta(\varphi)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \end{aligned} \quad (27)$$

由 $\tan \varphi = A_k/B_k$ 得第 k 次谐波的相位误差

$$\begin{aligned} \delta(\varphi_k) &= - \frac{\beta_k \delta(\alpha_k) - \alpha_k \delta(\beta_k)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\ &= - \frac{ka_2[a_2 + a_3 \cos k(\varphi - \varphi) + \cos k\varphi]\delta(\varphi)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\ &\quad + \frac{ka_3[a_3 + a_2 \cos k(\varphi - \varphi) + \cos k\varphi]\delta(\varphi)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \end{aligned} \quad (28)$$

3 结 论

综上所述, 得出以下结论:

q_k 可作为衡量测头读数及角位置误差对测量结果的影响的指标, 它说明对于圆度不同级次的谐波, 测头读数及角位置误差有不同的误差放大系数。对给定的谐波级次, q_k 的大小取决于三个测头之间的夹角 φ 的选择, φ 选择不当会使 q_k 很大, 这样, 较小的读数或角位置误差就会导致测量结果的较大失真。

前人研究大都认为, 三点法圆度测量结果失真的根本原因是 φ 选择不当, 使三点法圆度各次谐波的加权函数 $\omega(k) = 1 + a_2 e^{-jk\varphi} + a_3 e^{-jk\varphi} = 0$ [注: 对方程(2)两端进行 Fourier 变换可得此式], 结果导致某些谐波无法确定, 即产生谐波抑制, 因此, 确定 φ 时应注意使 $2\pi Q_k$ 有较小的最大公约数, 即从理论上保证了可测得很高级次的谐波。但这样确定的 φ 如不能保证对所有谐波 q_k 都较小, 仍不能从根本上克服测量结果失真问题。因此, 测量结果失真的根本原因在于 φ 选择不当使某些谐波的 q_k 很大。

测头间夹角的确定, 不仅要使数学上保证三点法的谐波加权函数 $\omega(k) = 1 + a_2 e^{-jk\varphi} + a_3 e^{-jk\varphi}$ 不产生谐波抑制, 而且要使圆度各次谐波的 q_k 都较小, 这可归结为一个多目标函数的优化问题。根据测量特点, 可以 q_k 为基本函数构造目标函数, 如 (i) 对于给定的级次 k_m , 求 Q_k Q , 使所有各次谐波的 q_k 中的最大值为最小。(ii) 对于给定的谐波级次 k_m , 求 Q_k Q , 对于所有各次谐波的 q_k , 使 $\frac{1}{k_m - 1} \sum_{k=2}^{k_m} q_k$ 为最小, 或 $\frac{1}{k_m - 1} \sum_{k=2}^{k_m} q_k^2$ 为最小。

本文的研究弥补了前人研究的不足, 为系统参数优化以及研究测量误差的分布与传递规

$a_3 e^{-jkQ}$ 不产生谐波抑制, 而且要使圆度各次谐波的 q_k 都较小, 这可归结为一个多目标函数的优化问题。根据测量特点, 可以 q_k 为基本函数构造目标函数, 如 (i) 对于给定的级次 k_m , 求 Q_2, Q_3 , 使所有各次谐波的 q_k 中的最大值为最小。(ii) 对于给定的谐波级次 k_m , 求 Q_2, Q_3 , 对于所有各次谐波的 q_k , 使 $\frac{1}{k_m - 1} \sum_{k=2}^{k_m} q_k$ 为最小, 或 $\frac{1}{k_m - 1} \sum_{k=2}^{k_m} q_k^2$ 为最小。

本文的研究弥补了前人研究的不足, 为系统参数优化以及研究测量误差的分布与传递规律, 进一步提高三点法的测量精度奠定了基础。

参 考 文 献

- 1 青本保雄, 大辕成夫 三点法真丹度测定法の展开. 精密机械[日], 1966, 32(12): 831~ 836
- 2 Mitsui K. Development of new measuring method for spindle rotation accuracy by three points. Proceedings of 23-rd International M TDR, 1982 115~ 121
- 3 朱训生 三点法 EST 形状失真的根本原因及克服办法. 上海: 上海交通大学学报, 1988, 22(4): 1~ 12
- 4 加藤秀雄, 野村雄二郎, 中野嘉邦 三点法に基づく机上真丹度测定法の改良とn点法への扩张. 精密工学会志, 1990, 56(12): 2303~ 2308
- 5 朱永生 实验物理中的概率与统计. 北京: 科学出版社, 1991

An Analysis on the Accuracy for Roundness Measurement with Three-Point Method

ZHANG Yu-Hua

(Optical Engineering Department of Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

WANG Xiao-Lin

(School of Mechanical Engineering, Shandong Polytechnic University, Jinan 250061)

Abstract

The effect of the reading errors and the angular misalignments of the probes on the accuracy for roundness measurement with three-point method has been analyzed in detail in this paper. Based on the principle of three-point method and error analysis theory, the error propagation equations of the reading errors and the angular misalignments of the probes in roundness measurement are derived. It is found that the root cause for the distortion of the roundness measured by three-point method is the improper arrangement of the three probes' angular position which makes the reading errors over amplified at some harmonics of roundness. In order to improve the accuracy for roundness measurement by three-point method, the angles between three probes must be optimized so that the effect of the reading errors and the angular misalignments on the accuracy for the measurements of all harmonics of roundness could be minimized.

Key words: Three-point method, Roundness, Measurement, Error

张宇华 男, 1964年生, 博士。1986年7月于天津大学精密仪器系本科毕业, 1993年3月于中国科学院长春光学精密机械研究所研究生部硕士毕业, 1986年9月天津大学精密仪器与光电子工程学院博士毕业。现在北京理工大学光电工程系仪器仪表博士后流动站从事博士后科研工作。研究方向为测试计量技术与仪器、自适应光学。