

印刷滚体非牛顿流体弹流 动压性能的有限元分析

王建设

(中国科学院长春光学精密机械研究所 长春 130022)

摘要 印刷滚体间的接触是一个带有共性的主要技术问题,对于非牛顿性质的流体,本文介绍了一种研究这种软层接触问题的分析模型。应用加辽金加权残留方法和虚功原理分别得到了关于压力和变形的控制方程。用有限元方法求得了问题的数值解,与测试数据相比较,结果具有一定的一致性。

关键词 软弹滚体接触 非牛顿流体 有限元方法

1 前 言

在印刷工业中,将一种流体从供应槽中带到欲印刷的材料上是通过一系列按一定位置排列的各种滚体实现的。一对滚体常是由一个刚性的滚体与另一个表面附着一层软的弹性材料的滚体组成的。滚体运动时,迫使流体从它们的接触处流过,此处的流体因动压效应而产生压力。一定的压力作用可将两滚体的

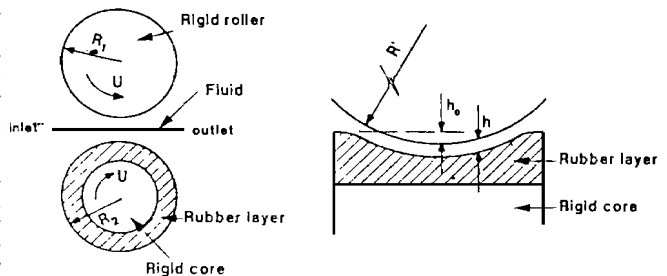


Fig. 1 Schematic representation of contact configuration

的接触表面分开。由于其中的一个滚体表层是软弹性材料,它允许在接触时刚性滚体压入其表面内一段距离,这一尺寸这里称为压入啮合量。在印刷过程中,这一尺寸对于工作的质量影响很大,故是一个重要的设计参数。当流体被迫通过这段接触区时,就构成了一个软弹流动压接触问题,见图1所示。它与常见的弹流动压接触问题有很大的不同。表层材料的弹性的作用使得流体膜的压力相对比较小;另一方面,在一定条件下,此处的流体表现出非牛顿流体的性质。

国外一些文献曾对同类接触问题从不同方面做了研究和实验测试。本文在借鉴他人某些结果的基础上,用有限元方法对此问题做了分析。

2 流体膜压力的模型

流体膜压力的雷诺方程为

$$\frac{d}{dx} \left[H \frac{dp}{dx} \right] = U \frac{dh}{dx} \quad (1)$$

式中

$$H = \int_0^h \frac{\gamma}{\mu} (y - F) dy$$

$$F = \frac{\int_0^h \frac{\gamma}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy}$$

U —— 滚体的表面速度;

h —— 流体膜厚度。

流体的粘度 μ 受到压力或剪切效应的作用而发生变化,当 μ 在膜厚上已知时,则式(1) 可得到其在边界条件下的解。流体膜的剪应力 τ 与其速度梯度有关,则有方程

$$\tau = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \quad (2)$$

式中

n —— 表征流体性质的幂律指数;

m —— 指数

在流体膜的稳态流动前提下,有下列平衡关系

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \quad (3)$$

即

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy} \left[m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \right] \quad (4)$$

在滚动条件下,式(4)的边界条件为

$u = U$ 当 $y = 0$ 或 h 时

$\frac{du}{dy} = 0$ 当 $y = \frac{h}{2}$ 时

对于 $y = \frac{h}{2}$ 和 $\frac{dp}{dx} > 0$, 积分式(4)得

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{1}{m} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left[y - \frac{h}{2} \right]^{1/n} \quad (5)$$

和

$$u(y) = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{1}{m} \frac{dp}{dx}\right)^{1/n} \left[\left(y - \frac{h}{2}\right)^{n+\frac{1}{n}} - \left(\frac{h}{2}\right)^{n+\frac{1}{n}} \right] + U \quad (6)$$

由上述各式可求 μ

$$\mu = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \quad (7)$$

为了求解方程(1), 应用加辽金加权残留法将方程(1)转化为下列方程

$$\left\{ \int_{\Omega} \left[H_i \frac{dW_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right] d\Omega \right\} \{p_j\} = \int_{\Omega} W_i \left[U \frac{dh_i}{dx} \right] d\Omega \quad (8)$$

式(8)可写成

$$[k]_p \{p\} = \{f\}_p \quad (9)$$

式中:

$$k = \int_{\Omega} \left[H_i \frac{dW_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right] d\Omega$$

$$f = \int_{\Omega} W_i \left[U \frac{dh_i}{dx} \right] d\Omega$$

N_j ——形函数;

W_i ——加权函数;

p_j ——流体膜的压力。

将接触区一维流体求解域离散为有限元单元, 单元由三节点组成。

一维流体压力的边界条件为

$$p = 0, \quad \text{当 } x = x_a \text{ 入口处,}$$

$$p = 0, \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = x_b \text{ 出口端}$$

流体膜的厚度为

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} + v(x) + s(x) \quad (10)$$

式中:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

h_0 ——在 $x = 0$ 处不计变形时两滚体表面间的距离;

$v(x)$ ——滚体弹性表面的位移;

$s(x)$ ——两滚体表面的粗糙度。

应用有限元数值求解可求得流体膜的压力。

3 滚体表层的弹性变形

滚体表层的变形可作为平面应变问题来处理, 应用虚功原理可得下列方程

$$[K]_s \{\delta\} = \{f\}_s \quad (11)$$

式中:

$$[K]_s = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

$[B]$ ——应变矩阵;

$[D]$ ——弹性矩阵;

$\{f\}_s$ ——载荷列阵;

$\{\delta\}$ ——位移列阵。

将滚体在接触处的弹性层的平面求解域离散为有限元单元,并且使其接触处表面上的单元节点与流体膜中单元节点的位置保持一致。

4 求解过程

对流体膜压力和表层弹性变形的求解采用松弛迭代的办法。印刷滚体表层材料的弹性模量为 2MPa , 波桑比为 0.45 , 滚体弹性层厚度为 8mm 。在这种软弹性接触问题中,因为在接触时两滚体之间存在一段压入啮合尺寸 h_0 ,所以在迭代求解的开始阶段,需要逐渐地将 h_0 这一尺寸值引入到 h 中。完成这个过程则需要 40 次的迭代运算。

迭代运算的收敛条件为

对于压力: $\epsilon_p = 0.01\%$, 对于变形: $\epsilon_\delta = 1\%$ 。

具体的求解过程是:

(1) 指定 h_0 , 对给定的载荷, 按赫兹压力分布计算 $v(x)$ 的初始值。将 h_0 的数值按一定的规律经 40 次迭代运算逐步引入到流体膜厚度 h 中。

(2) 由式(10) 求出流体膜厚度 h 。

(3) 由式(9) 求出流体膜的压力 p 。

(4) 由式(11) 求出接触表面的位移 δ 。

(5) 判断表面位移 δ 和流体膜压力 p 是否满足迭代运算的收敛条件。否则,从步骤(2) 开始重复上述过程,直到得到所求问题的数值解。

5 实例计算结果及其与测试数据的比较

图 2 是流体膜的粘度与剪切率的关系曲线。

图 3 是关于流体膜压力、膜厚的计算数据曲线和测试数据曲线。对于 $\frac{du}{dy} = 500\text{s}^{-1}$, 在图 2 曲线上对应流体粘度值条件下,实验测试结果说明,当滚体表面速

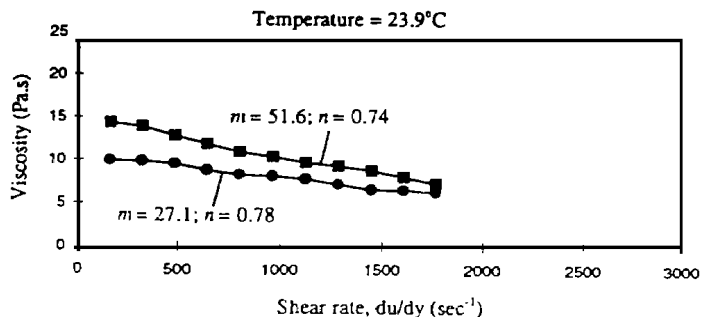


Fig. 2 Viscosity variation with shear rate for magenta ink.

■ du/dy increases; ● du/dy decreases

度低时, $U = 1.0\text{ms}^{-1}$, 在流体膜承载区上, 压力的计算值与测试值比较接近, 膜厚度曲线基本上一致, 如图 3a 所示; 在高速时, $U = 3.0\text{ms}^{-1}$, 压力的计算数据与测试数据差别较大, 如图 3b 所示。将弹性模量从 2MPa 增加到 3MPa 再次计算。从图 3b 中压力曲线上来看, 计算的结果与测试数据则比较接近, 流体膜的厚度基本上没有变化。

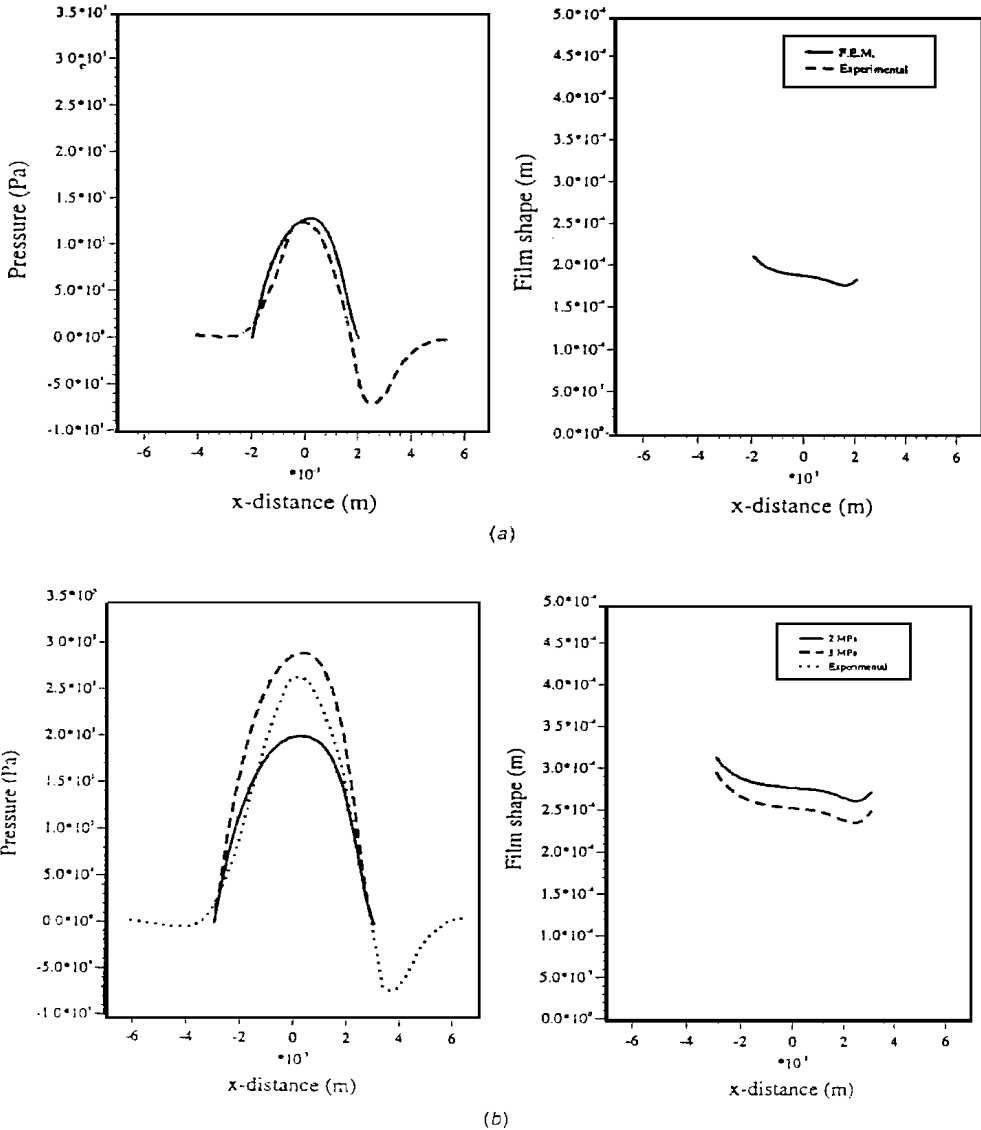


Fig. 3 (a) Comparison of measured and predicted ink film pressure and computed film thickness: $E_R = 2\text{MPa}$; $U = 1.0\text{ms}^{-1}$; $h_0 = 0.1\text{mm}$, $m = 27$; $n = 0.78$; $(du/dy)_T = 500\text{s}^{-1}$. (b) Comparison between measured and predicted ink film pressure and computed film thickness: $U = 3.0\text{ms}^{-1}$; $h_0 = 0.2\text{mm}$, $m = 27$; $n = 0.78$; $(du/dy)_T = 500\text{s}^{-1}$

6 结 论

在对印刷滚体软弹流动压接触问题分析的基础上,提出了研究软弹流动压性能的非牛顿流体的分析模型,用有限元方法求得了这种接触问题的数值解。与实验数据相比较,结果证明在正压力区内,这些分析模型是适用于研究这类软弹流动压接触问题的。同时也说明幂律模型不能适用于流体膜压力破裂区的情况,需要在今后的研究工作中做进一步的探索。

参 考 文 献

- 1 Miller R D W. Some effects of compressibility on the indentation of a thin elastic layer by a smooth rigid cylinder. *Appl Sci Res*, 1996, 16: 405 ~ 24
- 2 Hooke C J. The elasto-hydrodynamic lubrication of a cylinder on an elastomeric layer. *Wear*. 1986, 111: 83 ~ 89
- 3 Khonsari M N, Hua D Y. Generalised non-Newtonian elasto-hydrodynamic lubrication. *Trib Int*, 1993, 26: 405 ~ 411
- 4 Wilkinson W L. *Non-Newtonian Fluids - Fluid Mechanics, Mixing and Heat Transfer* (New York: Pergamon), 1960
- 5 Finlayson B A. *The Method of Weighted Residual and Variational Principles* (New York: Academic), 1972
- 6 Zienkiewicz O C. *The Finite Element Method* edn 3 (London: McGraw-Hill), 1977

Analysis of the Elastohydrodynamic Behaviour of Non-Newtonian Fluid Between Printing Rollers by Finite Element Method

WANG Jian-She

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

Abstract

The contact between printing rollers is one of the most generic and important techniques to study. A numerical model of a soft rolling contact is introduced for a non-Newtonian fluid. The governing equations with regard to fluid pressure are derived using the Galerkin weighted residual method, and the equations with regard to surface distortion are obtained by the application of the principles of virtual work. These equations are solved by finite element method. The numerical solutions of these equations are obtained by finite element method, which are compared with the experimental data. The results show that a agreement is achieved.

Key words: Soft rolling contact, Non-Newtonian fluid, Finite element method

王建设 男, 1958年12月出生, 1989年于中国科学院长春光机所硕士研究生毕业, 获硕士学位, 1996年于中国科学院长春光机所博士研究生毕业, 获博士学位, 并荣获1996年度中国科学院院长奖学金优秀奖。主要从事机械CAD、CAE, 机械动力学, 机械设计, 精密角测量仪器, 有限元方法、边界元方法在工程设计中的应用的研究工作。在国内外刊物上发表学术论文20余篇。