

基于熵不确定性概念的 机器人位姿精度理论(二)^{*} ——主要评价指标公式推导

刘桂雄 阎华 郑时雄
(华南理工大学机电工程系 广州 510641)

摘要 基于机器人位姿信息传输模型及所研究的位姿精度评价指标体系, 本文以平面 SCARA 机器人为例, 推导了主要位姿精度评价指标的计算公式。并提出该方法在深入研究中尚须解决的问题。

关键词 机器人 熵不确定性 评价指标 公式推导

1 引言

目前机器人位姿精度理论处理方法多数需要对由误差源误差引起的各参数误差分布作假设处理(表达成近似的常规分布), 建立位姿误差模型, 同时在多数情况下未能考虑测量误差因素的影响^[1-2]。为此, 本文作者提出基于熵不确定性概念的机器人位姿精度分析方法^[3], 它把误差处理的关注点放在误差能量分布及其对测量结果的影响上, 能有效对非常规分布进行处理, 有望解决目前机器人位姿精度研究的欠缺之处。本文将前期研究而建立的机器人位姿信息传输模型(见图1)基础上, 以平面 SCARA 机器人为例, 进一步对机器人新位姿精度理论评价指标体系的公式推导进行研究。

其于熵不确定性概念机器人位姿精度理论的评价指标体系主要包括^[3]: 机器人位姿不

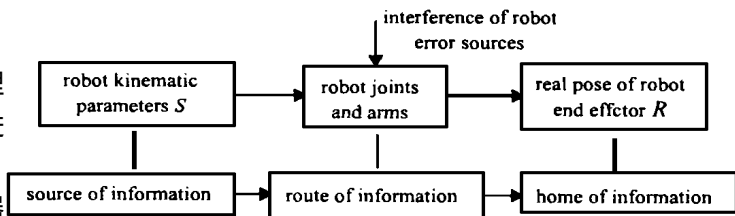


Fig. 1 Transmission model of robot pose information

^{*} 国家自然科学基金资助项目(59605022)和国家教育部博士点基金资助项目(98056106)

确定性 $H(S|R)$, 机器人位姿信息传输的信息量 $I(S;R)$ 及附加评价指标机器人位姿信息传输效率 η , 其计算公式分别由式(1)~(4)给出。

$$H(S) = - \int p(s) \log p(s) ds \tag{1}$$

$$H(S|R) = H(S|R) - H_{测} = - \int p(r) p(s|r) \log p(s|r) ds dr - H_{测} \tag{2}$$

$$I(S;R) = H(S) - H(S|R) \tag{3}$$

$$\eta = \frac{I(S;R)}{H(S)} \tag{4}$$

式中: $p(\bullet)$ 为 (\bullet) 的概率密度函数; R 和 R' 分别为机器人手末端的实到位姿和测得位姿; $p(s|r)$ —— 在 R' 已知的情况下, 信源(机器人的运动参数 S) 的条件概率密度函数; $H_{测}$ —— 由于测量因素引起的不确定性。

2 平面 SCARA 机器人位姿方程

如图 2 所示, 平面 SCARA 机器人共有四个自由度, 即: 绕 Z 轴回转的 θ_1 和 θ_2 , 给定工具点位置; 绕 Z 轴回转的 θ_3 , 给定工具点姿态及沿 Z 轴方向直线运动的 θ_4 , 给定工具的高度。在平面 SCARA 机器人上建立 DH 坐标系(见图 3), 有几点说明: ① 基础坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$ 建立在基架上, X_0 与各水平杆初始方向一致; ② 关节 1 的坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 的 X_1 轴与 X_0 轴方向一致; ③ 因为 Z_3, Z_4 轴在同一条直线上, 所以 X_4 轴的方向可任取(在这里设 X_4 方向与 X_3 方向的夹角为 θ_4 , 也即为关节 4 的转角, 且 θ_4 为从 X_3 绕 Z_3 轴向 X_4 轴)。

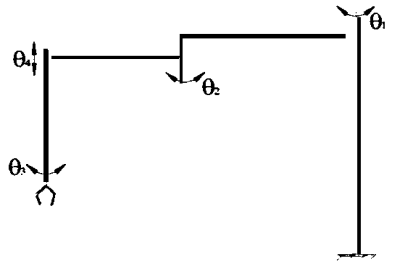


Fig. 2 Schematic diagram of planar SCARA robot

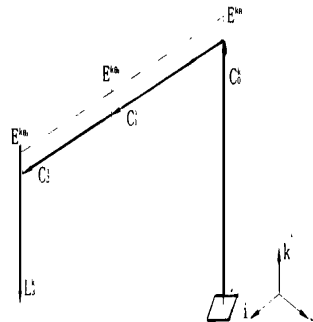
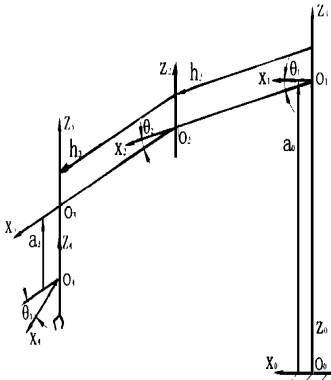


Fig. 3 DH coordinate system of planar SCARA robot

Fig. 4 Vector diagram of planar SCARA robot

平面 SCARA 机器人的机构向量如图 4 所示。图中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别代表 X, Y, Z 轴方向的单位向量, \vec{C} 为长度不变的向量, \vec{L} 为长度变化的向量, 其特征方程式为

$$\vec{P} = \vec{C}_0^* + E^{k\theta_1}(\vec{C}_1^* + L^{k\theta_2}(\vec{C}_2^* + \vec{E}_3^*)) \quad (5)$$

$$E = E^{k\theta_1}E^{k\theta_2}E^{k\theta_3} = E^{k(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} \quad (6)$$

则由式(5)有:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} h_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} h_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_3 \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \begin{bmatrix} h_2\cos\theta_1 + h_3\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ h_2\sin\theta_1 + h_3\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \alpha_0 - \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

在式(6)中,若令 $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$,则有:

$$E = E^{k(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} = E^{k\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

从上式可以看出,SCARA 机器人的姿态方程只与量 θ 有关,因此可以用姿态角 θ 代替上述矩阵来表达 SCARA 机器人的末端姿态。综合式(7)和(8),则有平面 SCARA 机器人的位姿方程:

$$\left. \begin{aligned} X &= h_2\cos\theta + h_3\cos(\theta + \theta_2) \\ Y &= h_2\sin\theta + h_3\sin(\theta + \theta_2) \\ Z &= \alpha_0 - \alpha_3 \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3 主要位姿精度评价指标公式推导

对于平面 SCARA 机器人来说,运动参数 S 的手部的实到位姿 R 分别为 $(\theta_1, \theta_2, \theta, a_3)$ 和 (X, Y, Z, θ) ,各运动参数的取值范围为^[4]: $\theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}, \theta_{2\min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \theta_{3\min} \leq \theta_3 \leq \theta_{3\max}, \alpha_{3\min} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{3\max}$, $H(S)$ 即为各运动参数在该范围内取值的不确定性。考虑各运动参数之间相互独立性及各参数取值的可能性,随机向量 $S(\theta_1, \theta_2, \theta, a_3)$ 概率密度如下:

$$\begin{aligned} p(s) &= p(\theta_1)p(\theta_2)p(\theta_3)p(a_3) \\ &= \frac{1}{(\theta_{1\max} - \theta_{1\min})(\theta_{2\max} - \theta_{2\min})(\theta_{3\max} - \theta_{3\min})(\alpha_{3\max} - \alpha_{3\min})} \end{aligned}$$

则信源 S 的信息熵为

$$\begin{aligned} H(S) &= - \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \int_{\theta_{3\min}}^{\theta_{3\max}} \int_{\alpha_{3\min}}^{\alpha_{3\max}} p(s) \log p(s) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 da_3 \\ &= \log(\theta_{1\max} - \theta_{1\min}) + \log(\theta_{2\max} - \theta_{2\min}) + \log(\theta_{3\max} - \theta_{3\min}) + \log(\alpha_{3\max} - \alpha_{3\min}) \quad (10) \end{aligned}$$

3.1 机器人位姿不确定性 $H(S|R)$ 及机器人位姿信息传输的信息量 $I(S;R)$

如果在机器人位姿信息的传输过程中, 不存在各机构误差源的干扰, 那么 S (机器人各运动参数) 的残留熵 $H(S|R)$ 就为 0。但由于在实际的机器人机构中存在着各种误差源的干扰, 使得在已知 R (机器人手部实到位姿) 后仍不能完全消除 S 的不确定性, 但与 R 已知前相比, S 所在的范围已大为缩小。相应地, S 的不确定性也减小了。

由式(2)可知, 要想求 $H(S|R)$, 首先要求 $p(r)$ 、 $p(s|r)$ 和 $H_{测}p(r)$ 和 $H_{测}$ 可以根据测得的机器人手部位姿 R 和实际测量情况求出, 则关键在于求 $p(s|r)$ 。为此, 在这里要用到概率论中求随机变量组函数变换的概率密度的有关定理^[7]。将式(7)中的 X, Y, Z, θ 分别用 X, Y, Z, θ 代替, 并设:

$$\begin{cases} S_1 = \theta_1 = f_1(X, Y, h_2, h_3) \\ S_2 = \theta_2 = f_2(X, Y, h_2, h_3) \\ S_3 = \theta_3 = f_3(X, Y, \theta, h_2, h_3) \\ S_4 = a_3 = f_4(Z, a_0) \\ S_5 = X \\ S_6 = Y \\ S_7 = Z \end{cases}$$

反解可得

$$\begin{cases} R_1 = h_2 = \frac{X \sin(\theta_1 + \theta_2) - Y \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_2} = \frac{S_5 \sin(S_1 + S_2) - S_6 \cos(S_1 + S_2)}{\sin S_2} \\ R_2 = h_3 = \frac{Y \cos\theta - X \sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{S_6 \cos S_1 - S_5 \sin S_1}{\sin S_2} \\ R_3 = a_0 = Z + a_3 = S_7 + S_4 \\ R_4 = \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = S_1 + S_2 + S_3 \\ R_5 = X = S_5 \\ R_6 = Y = S_6 \\ R_7 = Z = S_7 \end{cases}$$

故:

$$P_S(s_1, s_2, \dots, s_7) = P_R[r_1(s_1, \dots, s_7), \dots, r_7(s_1, \dots, s_7)] \cdot |J|$$

其中, $|J|$ 为雅可比行列式:

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{dR_1}{dS_1} & \frac{dR_2}{dS_1} & \cdots & \frac{dR_7}{dS_1} \\ \frac{dR_1}{dS_2} & \frac{dR_2}{dS_2} & \cdots & \frac{dR_7}{dS_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dR_1}{dS_7} & \frac{dR_2}{dS_7} & \cdots & \frac{dR_7}{dS_7} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin^2\theta_2} [X \sin\theta - Y \cos\theta_1] [X \sin(\theta_1 + \theta_2) - Y \cos(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

另由边缘分布定理^[7], $\theta_1, \theta_2, \theta_3, a_3$ 的概率密度可由下式求得:

$$p_1(s_1) = \int_{s_2} \dots \int_{s_7} p_s(s_1, s_2, \dots, s_7) ds_2 \dots ds_7$$

$$= \int_{s_2} \dots \int_{s_7} p_R[r_1(s_1, \dots, s_7), \dots, r_7(s_1, \dots, s_7)] \cdot |J| \cdot ds_2 \dots ds_7$$

即:

$$p_1(\theta) = \int_{\theta_2} \int_{\theta_3} \int_{\alpha_x} \int_{y_z} p_R[h_2(\theta_1, \theta_2, x, y), h_3(\theta_1, \theta_2, x, y),$$

$$a_0(a_3, z), \theta(\theta_1, \theta_2, \theta_3), x, y, z] \cdot |J| \cdot d\theta_2 d\theta_3 da_3 dx dy dz$$

同理可求得 $p_2(\theta_2), p_3(\theta_3), p_4(a_3)$ 。因此有:

$$p(s) = p(\theta_1, \theta_2, \theta_3, a_3) = p_1(\theta_1)p_2(\theta_2)p_3(\theta_3)p_4(a_3)$$

由于 $p(s|r)$ 是当 $R(X, Y, Z, \theta)$ 已知时 S 的条件概率, 因此在计算 $p(s)$ 的过程中若已知量 X, Y, Z, θ 不参与积分, 所得结果即为 $p(s|r)$ 。在计算式(2)的积分时可将 R 的循环置于外层, 首先对 S 求积分(对于每一个 R):

$$H_1 = \int p(s|r) \log p(s|r) ds$$

再对所有的 R 求积分有:

$$H(S|R) = - \int p(r) H_1 dr$$

最后将所求得的 $H(S|R)$ 代入式(2)即可求出 $H(S)$ 。由以上求得的 $H(S)$ 和 $H(S|R)$, 根据式(3)即可求得第二个评价指标机器人位姿信息传输的信息量 $I(S; R)$ 。

3.2 机器人位姿信息传输效率 η

对于两台不同的机器人其 $H(S)$ 一般不同, 这样就很难用前两个评价指标来评价它们精度。对于两台不同的机器人来讲, 如有 $H_1(S)$ 大于 $H_2(S)$ 及 $H_1(S|R)$ 大于 $H_2(S|R)$, 若用第一个评价指标则每台机器人的精度高; 但由于他们的 $H(S)$ 不同, 就很可能出现 $I_1(S; R)$ 大于 $I_2(S; R)$ 的情况, 因此若用第二个评价指标则第一台机器人的精度高。针对这种情况, 可用 η 作为不同机器人之间进行精度评价的附加评价指标, 可根据式(4) 求出。

4 结 束 语

基于机器人位姿信息传输模型及所研究的位姿精度评价指标体系, 本文以平面 SCARA 机器人为例, 建立了 DH 坐标系及推导出位姿公式, 并根据概率论的有关定理对机器人新位姿精度理论的评价指标进行了公式推导。

由于新的机器人位姿精度评价指标与机器人各误差因素的概率分布有直接关系, 因此机器人位姿不确定性的信息熵表示方法将比传统的误差处理方法更合理、更全面。但在该方法的研究应用中还有一些尚须解决的问题: ①前面公式推导中遇到的 $H_{测}$ 的计算问题, 可考虑与测量仪器、测量方法、测量数据本身等诸多因素, 根据测量不确定度的基本原理, 研究基于熵不确

定性概念的新方法, 从而完成目标概念的统一; ②在利用计算机信息熵和残留熵的数值方法的研究中, 由于连续量的量化问题对信息量的计算结果影响很大, 因此, 就要制订出有关的计算规则, 使计算方法方便且不影响实际的分析结果。

参 考 文 献

- 1 阎 华, 刘桂雄, 郑时雄. 机器人位姿误差建模方法综述. 华南理工大学学报, 1999; 26(2)
- 2 Zhuang Hanqi, et al. Error-model-based robot calibration using a modified CPC model. Robotics & Computer-Integrated Manufacturing, 1993, 10(4): 287 ~ 299
- 3 阎 华, 刘桂雄, 郑时雄. 基于熵不确定性概念的机器人位姿精度理论(一)——评价指标体系的建立. 光学精密工程, 1999; 7(1): 64 ~ 69
- 4 SRX-4CH 装配机器人操作手册(机械部分). Sony Corporation
- 5 林洪桦. 现代测量误差分析及数据处理(七)——测量不确定度及其熵表示法. 计量技术, 1997, 7: 38 ~ 41
- 6 谢存禧, 郑时雄, 林怡青. 空间机构设计. 上海: 上海科学技术出版社, 1996
- 7 周炯磐. 信息理论基础. 北京: 人民邮电出版社, 1998

Robot Pose Accuracy Theory Based on Entropy Uncertainty Concept(2) ——Formulae Derivation of Main Evaluation Index

LIU Gui-Xiong, YAN Hua, ZHENG Shi-Xiong

(Dept. of Mechatronic Engineering,

South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract

Based on transmission model of robot pose information and pose accuracy evaluation index system which have been studied, this paper derives the formulae of main pose accuracy evaluation index using planar SCARA robot as an example. In the end of this paper, some problems need to be solved during the study of this method are presented.

Key words: Robot, Entropy uncertainty, Evaluation index, Formulae derivation

刘桂雄 男, 1968年10月生, 毕业于重庆大学光电精密仪器专业, 1995于重庆大学光机所获精密仪器及机械专业工学博士学位, 现为华南理工大学机电工程系副教授, 全国工业机器人标准化委员会委员、国际光学学会会员、中国机械工程学会高级会员, 1997年度广东省自然科学基金机械学科组员。目前主持包括两项国家自然科学基金(59605022)(69785010)和多项省市重点攻关项目, 在国内外发表学术论文40余篇, 现在研究领域为机器人技术及制造自动化、光电检测技术。