

文章编号 1004-924X(1999)05-0100-06

数字光学轮廓仪中相位去包裹算法研究*

曹原 韦春龙 程维明 陈明仪

(上海大学精密机械工程系 上海嘉定 201800)

摘要 相位扫描干涉度量术的广泛应用推动了去包裹算法的发展。在多种算法中,用于数字光学轮廓仪的相位去包裹算法必须具有较高的普遍适用性,而且必须兼顾健壮性与效率。本文对传统算法和最小二乘算法这两种典型去包裹算法进行了比较研究,并在自行研制的数字光学轮廓仪上进行了验证。

关键词: 数字光学轮廓仪 相位去包裹 最小二乘算法

中图分类号 TB92 **文献标识码** A

1 引言

自动条纹分析技术在工业检测中有着日益广泛的应用。其中由相移(Phase Stepping)或是条纹图傅立叶变换实现的技术有一个共同的问题,即由于使用了反正切函数而使相位包裹在 $[-\pi, \pi]$ 之间。为此需要进行相位去包裹处理(Phase Unwrapping)。在过去的十多年中发展了多种相位去包裹算法。其中较有代表性的有传统算法^[1]、“支切”(Branch Cut)算法^[2]、细胞自动机算法^[3]、二阶相位差分算法^[3]、最小价格匹配算法^[5]、最小二乘算法^[6]、一维快速傅立叶变换算法^[7]、理想平面拟合算法^[8]等。上述的各种算法中,除传统算法和最小二乘算法外的其它算法都是基于各自问题而提出的,因而不是普遍适用于各种测量表面。另外,由于早期计算条件的限制,每一种算法都是对健壮性与效率的折中。所谓健壮性,是指算法对条纹图中的不连续、噪声及低调制度的像素点的处理能力;而效率是指算法所需的计算时间。

在数字光学轮廓仪上使用何种相位去包裹算法是一个值得研究的问题。首先,由于测量表面类型的多样性,决定了算法必须具有较广的普遍适用性。其次,从仪器的实用角度出发,要求算法必须同时具有较好的健壮性和较高的效率。由于计算机技术的飞速发展,高速CPU和大内存芯片的出现,使得健壮性和效率俱佳的算法有了可能。基于这种考虑,本文研究了传统算法及最小二乘算法在自行研制的数字光学轮廓仪上的应用。

* 上海市科委青年基金项目,青年科技启明星计划项目资助

2 算法数学模型

2.1 传统算法^[1]

Itoh 给出了传统相位去包裹算法的数学描述。其实质为将反正切函数的主值看作是对真实相位 $\Phi(n)$ 进行包裹运算 W 的结果, 数学描述如下:

$$W_l[\Phi(n)] = \Phi_v(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

其中 $\Phi_v(n)$ 为主值, l 表示不同包裹运算。

等价地

$$W_l[\Phi(n)] = \Phi(n) + 2\pi k_l(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

其中 $k_l(n)$ 是一供选择的整数序列以使

$$-\pi \leq W_l[\Phi(n)] - \Phi(n) < \pi \quad (3)$$

定义

$$\Delta\Phi(n) = \Phi(n) - \Phi(n-1) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

则相位主值差

$$\Delta W_l[\Phi(n)] = \Delta\Phi(n) + 2\pi\Delta k_l(n) \quad (5)$$

此结果主值可再次运用包裹运算, 得

$$W_2\{\Delta W_l[\Phi(n)]\} = \Delta\Phi(n) + 2\pi[\Delta k_l(n) + k_2(n)] \quad (6)$$

此即包裹相位的包裹差。因为包裹运算 W_2 产生的值在 $[-\pi, \pi]$ 之间, 所以, 倘若

$$-\pi \leq \Delta\Phi(n) - \Delta W_l[\Phi(n)] < \pi \quad (7)$$

式(6)中 $2\pi[\Delta k_l(n) + k_2(n)]$ 必为 0。因此

$$\Delta\Phi(n) = W_2\{\Delta W_l[\Phi(n)]\} \quad (8)$$

从而

$$\Phi(m) = \Phi(0) + \sum_{n=1}^m W_2\{\Delta W_l[\Phi(n)]\} \quad (9)$$

式(9)表明, 通过对包裹主值差的求和运算可实现相位去包裹。显然, 式(7)若不满足的话, 真实相位是无法恢复的。此外, 象素间小于 π 弧度的取样必须满足, 否则, 相位去包裹将失败。

2.2 最小二乘算法^[6]

假定 Φ_j 为二维 $(M \times N)$ 离散点上的去包裹相位, $\Psi_{i,j}$ 为对应的包裹相位, 则有

$$\Psi_{i,j} = \Phi_{i,j} + 2\pi k, \quad k \text{ 为整数}$$

$$-\pi \leq \Psi_{i,j} - \Phi_{i,j} < \pi, \quad i = 0, \dots, M-1; j = 0, \dots, N-1 \quad (10)$$

首先定义包裹算子 W , 有

$$W\{\Phi_{i,j}\} = \Psi_{i,j} \quad (11)$$

定义

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j}^x &= W\{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}\} & i = 0, \dots, M-2; j = 0, N-1 \\ \Delta_{i,j}^x &= 0 & \text{其它} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j}^y &= W\{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}\} & i = 0, \dots, M-1; j = 0, N-2 \\ \Delta_{i,j}^y &= 0 & \text{其它} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 上标 x 和 y 分别指 i 和 j 相应的差。

使

$$S = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\Phi_{+1,j} - \Phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^x)^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^y)^2 \quad (14)$$

最小的 $\Phi_{i,j}$ 就是所求的去包裹相位值。

Hunt 的矩阵公式给出了由上述最小二乘得到的法方程, 即

$$\Phi_{+1,j} + \Phi_{-1,j} + \Phi_{i,j+1} \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j} = \Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x + \Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y \quad (15)$$

式(15)给出了在最小二乘意义上, 包裹相位差与去包裹相位差的关系, 对式(15)作简单恒等变换, 得

$$(\Phi_{+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{-1,j}) + (\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}) = \rho_{i,j} \quad (16)$$

其中

$$\rho_{i,j} = (\Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x) + (\Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y) \quad (17)$$

显而易见, 式(16)实际上是 $M \times N$ 方形网格上的离散 Poisson 方程,

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad (18)$$

注意到式(16)对所有矩形网格点 $i = 0, \dots, M-1; j = 0, \dots, N-1$ 都是有效的, 并且被用于计算 $\rho_{i,j}$ 的相位差仅在网格区域内是非零的。因此, 可以直接得出离散 Poisson 方程的 Neumann 边界条件

$$\Delta_{-1,j}^x = 0, \quad \Delta_{M-1,j}^x = 0 \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (19)$$

$$\Delta_{i,-1}^y = 0, \quad \Delta_{i,N-1}^y = 0, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (20)$$

下面引入二维快速离散余弦变换来求解方程(16)。

二维离散余弦正变换为:

$$C_{m,n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} 4x_{i,j} \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right] & m \neq 0, n \neq 0 \\ 0 & m = 0, n = 0 \\ 0 & m = 0, n \neq 0 \\ 0 & m \neq 0, n = 0 \\ \text{其它} & \text{其它} \end{cases} \quad (21)$$

二维离散余弦反变换为:

$$x_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_1(m) W_2(n) C_{m,n} \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right] & m \neq 0, n \neq 0 \\ 0 & m = 0, n = 0 \\ 0 & m = 0, n \neq 0 \\ 0 & m \neq 0, n = 0 \\ \text{其它} & \text{其它} \end{cases} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} W_1(m) &= \frac{1}{2} & m &= 0 \\ W_1(m) &= 1, & 1 & m & M-1 \\ W_2(n) &= \frac{1}{2} & n &= 0 \\ W_2(n) &= 1, & 1 & n & N-1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由式(23)可见, 实际上式(22)的余弦级数自动地加有 Neumann 边界条件, $\nabla \Phi \cdot n = 0$, 从而给出了式(16)的精确解。

以式(22)的形式展开 $\Phi_{i,j}$, 得

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_1(m) W_2(n) \hat{\Phi}_{m,n} \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right] \quad (24)$$

将式(24)代入式(16),并在式(16)右边作类似的展开,化简后,即得 DCT 域的精解:

$$\hat{\Phi}_{i,j} = \frac{\hat{\rho}_{i,j}}{2 \left[\cos \frac{\pi i}{M} + \cos \frac{\pi j}{N} - 2 \right]} \quad (25)$$

通过式(25)的反 DCT 变换即可得相位去包裹的 $\Phi_{i,j}$ 。由简单的替代,式(24)的 Neumann 边界条件为:

$$\begin{aligned} \Phi_{0,j} - \Phi_{-1,j} &= 0, & \Phi_{M,j} - \Phi_{M-1,j} &= 0 & j &= 0, \dots, N-1 \\ \Phi_{i,0} - \Phi_{i,-1} &= 0, & \Phi_{i,N} - \Phi_{i,N-1} &= 0 & i &= 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (26)$$

3 实 验

用自行研制的数字光学轮廓仪对表面经激光打孔的光盘进行了测量,图 1 为该数字光学轮廓仪的结构框图。图 2 是测量中得到的多帧条纹图中的一帧。经相移处理后可得包裹相位图 3,图 5、7 分别是用传统算法和最小二乘算法并去倾斜后的实际光盘表面。图 4、6、8 分别是其二维截面图。可见,对于测量较复杂的表面(如此例),传统算法出现了相位的跳变,结果是失败的,而用最小二乘算法则得到了正确的结果。并且值得提出的是,使用最小二乘算法计算时间不到 4s。

4 结 论

从上面的数学描述及实测结果可见,传统相位去包裹算法本质上是一种“串行”算法,因而必然对各种误差(低调点、散斑、行点等)敏感,所以,其实用性差。各种新算法的层出不穷正是为了回避这种“串行”特性,而实现正确相位去包裹。实际的相位去包裹过程不是一个直接的过程。由于条纹图中噪声、相位截断、污染及黑洞或阴影的存在,对这一部分的处理使得算法过程非常复杂。众多的研究者正是致力于发展各种健壮的算法来处理这一情形。运用最小二乘算法,对噪声进行了有效抑制或者去除了“坏”区域的影响,因而具有很好的健壮性,是一种适用于数字光学轮廓仪上的较理想算法。

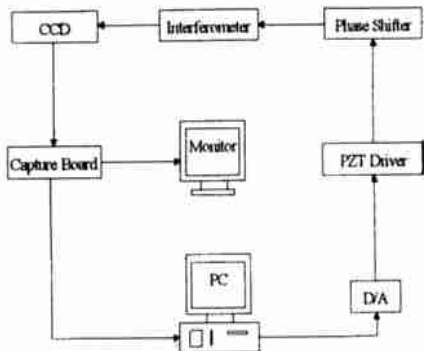


Fig. 1 Schematic of the digital optical profiler

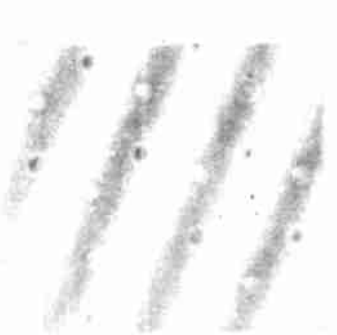


Fig. 2 Fringe pattern

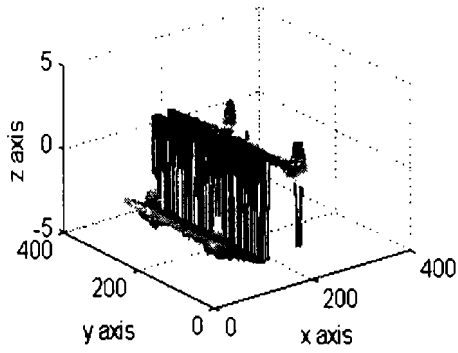


Fig. 3 Wrapped phase

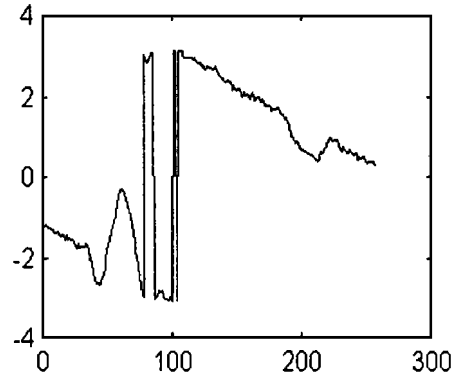


Fig. 4 A section of Fig. 3

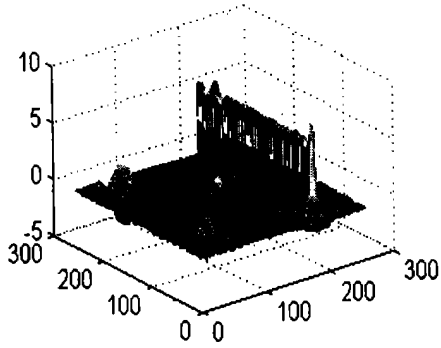


Fig. 5 Unwrapped phase(traditional algorithm)

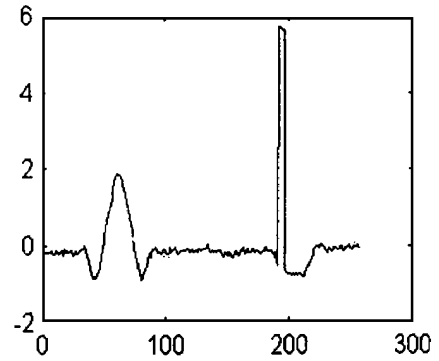


Fig. 6 A section of Fig. 5

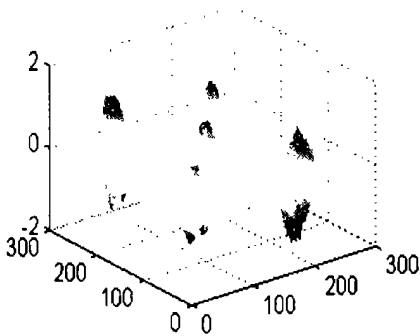


Fig. 7 Unwrapped phase(least-squares algorithm)

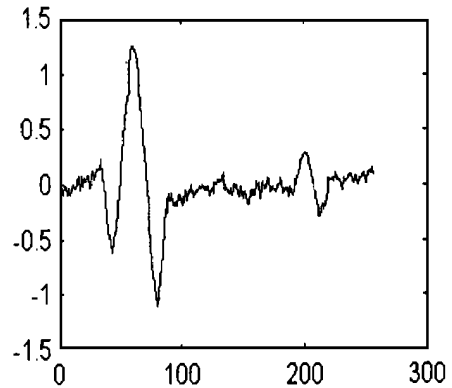


Fig. 8 A section of Fig. 7

参 考 文 献

- 1 Itoh K. Analysis of the phase unwrapping algorithm. *Appl Opt*, 1982, 21(14):2470
- 2 Goldstein R M, Zebker H A, Werner C L. Satellite radar interferometry: two-dimensional phase unwrapping. *Radio Science*, 1988, 23(4):713~720
- 3 Ghiglia D C, Mastin G A. Cellular-automata method for phase unwrapping. *J Opt Soc Am A*, 1987, 4(1):267~280
- 4 Bone D J. Fourier fringe analysis: the two-dimensional phase unwrapping problem. *Appl Opt*, 1991, 30(25):3627~3632
- 5 Buckland J R, Huntley J M. Unwrapping noisy phase maps by use of a minimum-cost-matching algorithm. *Appl Opt*, 1995, 34(23):5100~5108
- 6 Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods. *J Opt Soc Am A*, 1994, 11(1):107~117
- 7 韦春龙,陈明仪,王之江. 基于一维快速傅立叶变换的相位去包裹算法. *中国激光*, 1998, 25(9):813~816
- 8 Wei Chunlong, et al. Robust phase-unwrapping algorithm in the flat measurement for phase-stepping interferometry. *Proc SPIE*, 1998, 3558:480~486

Two-dimensional Phase Unwrapping Algorithms

CAO Yuan, WEI Chun-Long, CHENG Wei-Ming, CHEN Ming-Yi

*(Department of Fine Mechanical Engineering,
Shanghai University(Jiading), Shanghai 201800)*

Abstract

The wide use of phase stepping interferometry has greatly facilitated the development of phase unwrapping technique. When used in digital optical profiler, the phase unwrapping algorithm must be more general and robust, and has high efficiency. The two typical algorithms: the traditional algorithm and the least-squares algorithm have been discussed and examined by testing of an optical disk with the digital optical profiler we have developed. The experimental result shows that the least-squares algorithm is reliable and ideal.

Key words: Digital Optical Profiler, Phase unwrapping, Least-squares algorithm

曹原男, 1971年1月生, 上海大学精密机械工程系硕士研究生, 研究领域: 光学检测