

利用坐标变换推导经纬仪三轴误差

金光 王家骥

(中国科学院长春光学精密机械研究所 长春 130022)

倪伟

(北京跟踪与通信技术技术研究 北京 100094)

摘要 通过几台经纬仪的交汇测量方式或单站测距方式能够确定目标的空间坐标,经纬仪的三轴误差的大小直接影响测量精度。本文利用坐标变换方法推导经纬仪三轴误差,并将其结果与利用球面三角学推导的结果进行了比较,探索了推导经纬仪三轴误差的新方法。

关键词 经纬仪 三轴误差 坐标变换

中图分类号 V556.5 文献标识码 A

经纬仪是一种精密测角仪器,可用于测量水平角和垂直角。经纬仪的三轴误差一般指调平误差,水平轴误差及视准轴误差。我们定义垂直轴线对理想轴线的倾斜为调平误差;并含垂直轴的幌动误差;水平轴线不垂直垂直轴线为水平轴倾斜误差;视轴不垂直于水平轴线为视轴误差。由于上述三项误差的存在,使经纬仪产生指向误差。过去一般都采用球面三角学的方法,作某些简化后推导上述项误差,本文尝试坐标变换方法,不作任何简化推导经纬仪误差,其基本方法如下:

1 基本思想

设空间某一点 $K(S_1, S_2, S_3)$ 在地平坐标系中的坐标如图 1 所示:

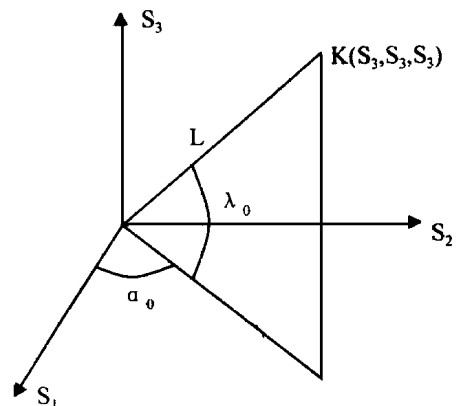


Fig. 1 Horizon coordinate system

其中: S_1 ——指向正北;

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos \lambda_0 \cos \alpha_0 \\ L \cos \lambda_0 \sin \alpha_0 \\ L \sin \lambda_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

S_2 ——垂直于 S_1 、 S_3 构成的平面;

S_3 ——指向天顶, 组成右手坐标系;

O ——测量原点(即经纬仪站点);

L ——目标斜距;

α_0 ——目标在地平坐标系中的方位角;

λ_0 ——目标在地平坐标系中的高低角。

设经纬仪的传感器(可以是摄影、电视、红外等)坐标系为 $[P_1, P_2, P_3]^T$ (其中 P_1 ——过传感器像面中心的视轴, P_2 和 P_3 构成像面), 经过连续地从地平坐标系到照准架坐标系、水平轴坐标系, 最后到传感器坐标系的正交坐标转换后, 空间目标在地平坐标系中的坐标与传感器坐标系中的坐标关系可由(2)式表示。

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: $[M]$ ——正交变换的总变换矩阵。

对(2)式求逆, 则有:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [M]^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由于矩阵 $[M]$ 为正交变换矩阵, 因此有:

$$[M]^{-1} = [M]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[M]^{-1} = [M]^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (5)$$

把 $[M]^T$ 代入(3)式并展开则有:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}p_1 + m_{21}p_2 + m_{31}p_3 + m_{41} \\ m_{12}p_1 + m_{22}p_2 + m_{32}p_3 + m_{42} \\ m_{13}p_1 + m_{23}p_2 + m_{33}p_3 + m_{43} \\ m_{14}p_1 + m_{24}p_2 + m_{34}p_3 + m_{44} \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据前面的讨论,我们假定目标在经纬仪像平面坐标系上脱靶量为零, P_1 代表仪器光轴, 则有 ($P_2 = P_3 = 0$), 下式存在:

(7)式与(1)式联立, 则有:

$$\begin{cases} L \cos \lambda_0 \cos \alpha_0 = m_{11}P_1 \\ L \cos \lambda_0 \sin \alpha_0 = m_{12}P_1 \\ L \sin \lambda_0 = m_{13}P_1 \\ 1 = m_{14}P_1 \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$m_{4i} = m_{i4} = 0, (i = 1, 2, 3)$$

(8)式就是利用坐标变换推导经纬仪三轴误差的方程组。由于(S_1, S_2, S_3)是指向空间某一点坐标, 当 P 轴指向该点时, 则有 $L = P_1$ 。而式中 $m_{1i}(i = 1, 2, 3)$ 是经纬仪含有三轴误差的变换矩阵。

2 推导步骤及结果

根据前面的讨论, 经纬仪的三轴误差分别为调平误差, 水平轴误差及视轴误差。由于本文基本出发点是基于坐标变换。因此, 利用坐标系分别绕 S_1 轴, S_2 轴及 S_3 轴旋转并用 M_1, M_2, M_3 分别来表示形成的变换矩阵构成上述三种误差所需的矩阵。

2.1 调平误差(V_{av})

调平误差会引起经纬仪垂直轴的倾斜。由图 1 来定义调平误差的变换矩阵, 其变换步骤为:

- ①绕 S_3 轴转 α_v ②绕 S_2 轴转 V ③绕 S_3 轴转 $(\alpha_v - \alpha)$ ④绕 S_2 轴转 λ

$$M = M_2 M_3 M_2 M_3$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_v - \alpha) & \sin(\alpha_v - \alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_v - \alpha) & \cos(\alpha_v - \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos V & 0 & -\sin V & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin V & 0 & \cos V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

把(8)式和(9)式联立, 可得下列方程组:

解方程(10)可得下式:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_0 \cos \alpha_0 &= \cos \lambda \cos \alpha \cos V \cos \alpha - \cos \lambda \sin \alpha \sin \alpha - \sin \lambda \sin V \cos \alpha \\ \cos \lambda_0 \sin \alpha_0 \cos V \sin \alpha &- \cos \lambda \sin \alpha \cos \alpha - \sin \lambda \sin V \sin \alpha \\ - \sin \lambda_0 &= - \cos \lambda \cos \alpha \sin V - \sin \lambda \cos V \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{\tan \lambda \sin(\alpha_0 - \alpha) \sin V}{1 + \tan \lambda \sin V \cos(\alpha_0 - \alpha)} \\ \Delta \lambda &= \cos(\alpha_0 - \alpha) \sin V \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中: $\Delta \alpha$, $\Delta \lambda$ 分别为经纬仪投影到水平面和垂直面的角误差;

α , λ 分别为经纬仪的方位角和高低角;

α_0 是经纬仪垂直轴倾斜方向;

V 是经纬仪垂直轴倾斜角。

2.2 水平轴误差(γ)

水平轴误差是指经纬仪水平轴回转中心与垂直轴回转中心的不垂直度。一般用 γ 来表示。

由于经纬仪存在水平轴误差, 则对经纬仪的测量带来影响。水平轴的误差的变换矩阵是:

①绕 S_3 轴转 α ②绕 S_1 转 γ ③绕 S_2 轴转 λ

$$M = M_2 M_1 M_3$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

把(8)式和(12)式联立, 可得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_0 \cos \alpha_0 &= \cos \lambda \cos \alpha - \sin \lambda \sin \gamma \sin \alpha \\ \cos \lambda_0 \sin \alpha_0 &= \cos \lambda \sin \alpha + \sin \lambda \sin \gamma \cos \alpha \\ - \sin \lambda_0 &= \sin \lambda \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

解方程(13)可得下式:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= \sin \gamma \tan \lambda \\ \Delta \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2.3 视准轴误差(C)

视准轴误差是指经纬仪光轴与水平轴不垂直度, 一般用 (C) 来表示。视准轴误差的变换矩阵是:

①绕 S_3 轴转 α ②绕 S_2 轴转 λ ③绕 S_3 轴转 C

$$M = M_3 M_1 M_3$$

$$= \begin{bmatrix} \cos C & -\sin C & 0 & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

把(8)式和(15)式联立, 可得下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda \cos \alpha &= \cos C \cos \lambda \cos \alpha + \sin C \sin \alpha \\ \cos \lambda \sin \alpha &= \cos C \cos \lambda \sin \alpha - \sin C \cos \alpha \\ -\sin \lambda &= -\sin \lambda \cos C \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

解(16)式有:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda - \Delta \lambda \\ \alpha &= \alpha - \Delta \alpha \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{C}{\cos \lambda} \\ \Delta \lambda &= 0 \end{aligned} \right\}$$

3 结 论

通过上述理论分析可以看出, 利用坐标变换法推导经纬仪的三轴误差较以往球面三角学方法更显得直观和简便, 从而为经纬仪的误差分析又提供了一种新方法。除了调平误差与球面三角学推导结果有差异外(笔者另有文章将详细分析), 其余二项误差结果一样。因此, 我们认为, 坐标变换法在分析经纬仪误差方面将会得到广泛的应用。

参 考 文 献

- 1 四川矿业学院数学教研组编. 数学手册, 北京: 科技出版社, 1978

The Three-error Axis of Theodolite with the Utilization of the Coordinate to the Variation

JIN Guang, WANG Jia-Qi

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

NI Wei

(Beijing Institute of Tracking and Tele-communication Technology, Beijing 100094)

Abstract

Theodolite can measure level angle and height angle with goal relative to station and can point spacecoordinate of goal through several theodolite joining measure or single survey. Thereby amount of the three-error axis of theodolite directly affect measures precision. This paper introduces the three-error axis of theodolite with the utilization of the coordinate to the variation and makes the comparison between the result and the utilization of spherule trigonometry. Thereby for the new method of the three-error axis of theodolite was searched.

Key words: Theodolites, Three-error axis, Coodinate transformation

金光男, 1958年生, 1982年毕业于长春光学精密机械学院精密仪器系。现在长春光机所读博士研究生。主要从事靶场光测设备和测绘相机的研究工作。