第 7 卷　第 5 期　光学　精密工程　Vol. 7, No. 5
1999 年 10 月　OPTICS AND PRECISION ENGINEERING　October, 1999

文章编号　1004-924X(1999)05-0056-07

时间序列分析法在六分力试验台上的应用

张洪伟
(北京跟踪与通信技术研究所　　北京 100094)

摘　要　火箭发动机推力偏心是影响火箭弹密集度的主要原因之一,利用六分力试验台可以测得火箭发动机的推力偏心,本文首先介绍了六分力试验台的基本原理。为了更好地了解六分力试验台的动态特性,需对其建立数学模型,本文介绍了采用时间序列分析方法建模的一般步骤,并对六分力试验台测得的试验数据进行了处理和建模,得到的最终模型为 ARMA(2, 1),表明六分力试验台是一个二阶系统,这与理论分析的结果是相一致的,同时可以对模型进行分析,得到诸如频率、阻尼比等特征参数,为改进六分力试验台的结构提供一定的帮助。

关键词　推力偏心　六分力试验台　时间序列分析　ARMA 模型
中图分类号　V430　　文献标识码　A

1 前　言

固体火箭发动机的推力偏心是影响火箭弹密集度的主要原因之一。目前,国内外都在积极进行研究,以期能够最大限度地减小火箭发动机的推力偏心。近几年来,我国在减小火箭发动机的推力偏心方面有了一定的进步,通过采用零推偏喷管,取代传统意义上的喷管,使火箭弹的密集度有了很大的提高。它的基本原理就是在不改变火箭发动机其它部件的情况下,通过改变喷管的内部型面,来减小火箭发动机的推力偏心。目前,这种方法具有一定的先进性,在国内得到了广泛的应用,而这其中主要应用的就是六分力试验台。

工程系统物理量的动态分析,在现代科学技术的发展中,已经显得越来越重要,许多工程系统的设计、试验、操作和合理使用方面,都需要充分了解有关系统的动态性能,要对系统建

收稿日期: 1999-03-26
修稿日期: 1999-06-21

模、分析和综合等,都少不了数学方法的选取。本文利用时间序列分析方法对利用六分力试验台测得的试验数据进行了处理,并建立了相应的 ARMA(m,n) 数学模型。

2　六分力试验台简介

六分力试验台是为了测定火箭发动机的推力在六个方向上的分力,进而进行零推偏喷管的设计而设计的,其基本原理图如图 1 所示。

通过试验台上的六个测力传感器,测得火箭弹试验时沿六个方向的推力,通过多次试验和一系列的数学运算和制图,可以设计出推力偏心最小时的喷管,称之为零推偏喷管。虽然称之为零推偏喷管,但是,在一般情况下,零推偏喷管产生的推力仍有一定的偏心量,这在目前情况下是没法解决的。为了更好地了解六分力试验台本身的一些动态性能,需要对其建立数学模型,有了数学模型,要进行动态系统的分析和研究,会非常方便。

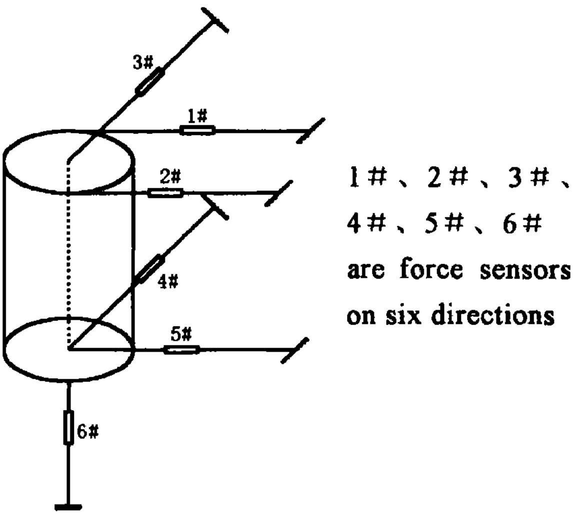

Fig.1　Basic principle of six-component test set

3　时间序列分析方法简介

随着科学技术的进步和社会经济的发展,在工程技术、经济管理、自然科学和社会科学的许多领域,经验的、定性的传统方法正逐渐被科学的、定量的现代方法所替代,人们日益重视对各种现象的定量观测及有关数据的收集和分析。自然的和人为的各种现象中,依据时间变化且不同时间的状况又相互关联的现象极为普遍,这类现象统称为动态过程。动态数据就是对动态过程进行观测所记录的依据时间变化的数据。统计学中把按时间顺序排列的数据称为时间序列。

时间序列可用如下的一类线性模型来描述:

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \varphi_2 x_{t-2} - \cdots \varphi_p x_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$t = 1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$

式中: $\{a_t\}$ 是白噪声序列,且模型对于 a_t 有两个假设: 一是 a_t 作为随机序列,不同时刻互不相关; 二是 a_t 和前时刻的序列观测值不相关[1]。

用 B^k 表示 k 步线性推移算子,即

$$\left.\begin{aligned} B^k x_t &= x_{t-k} \\ B^k a_t &= a_{t-k} \\ B^k C &= C \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

C 是常数,并令

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p \\ \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q \end{aligned} \tag{3}$$

则(1)式可以简写为:

$$\varphi(B) x_t = \theta(B) a_t \qquad t = 1, 2, \cdots, n_t \tag{4}$$

把 $\varphi(B)$ 和 $\theta(B)$ 作为算子的多项式,通常假定它们之间不出现公共因子。

模型(1)和模型(4)用线性差分方程描述了$\{x_t\}$和$\{a_t\}$这两个序列不同时刻之间的线性关系,因此是一种线性顺序模型。

特别地,如果 $\{x_t\}$ 是平稳零均值的,且模型(4)满足如下条件:

(1) $\varphi(B)$ 和 $\theta(B)$ 无公共因子;

(2) $\varphi_p \neq 0$ 且 $\theta_q \neq 0_t$;

(3) B 算子多项式 $\theta(B)$ 和 $\theta(B)$ 的根全部在单位圆外;

(4) t 时刻的白噪声 a_t 和前时刻的 $x_{t-\tau}(t > \tau)$ 不相关,即

$$E(a_t x_{t-\tau}) = E(x_{t-\tau} a_t) = 0 \qquad (\tau > 0) \tag{5}$$

这一模型就称为 p 阶自回归 − q 阶滑动平均混合模型,记为 ARMA (p, q) 模型。等式左边是模型的自回归部分,非负整数 p 称为自回归阶数,实参数 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$ 称为自回归系数;等式右边是模型的滑动平均部分,非负整数 q 称为滑动平均阶数,实参数 $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)$ 称为滑动平均系数。特殊地,若 $p = 0$,模型称作纯滑动平均模型,记为 MA (q);若 $q = 0$,模型称作纯自回归模型,记为 AR(p),它描述的是序列 $\{x_t\}$ 自身某一时刻和前 p 个时刻之间的关系。若 $p = q = 0$,模型就退化为 $x_t = a_t$,即$\{x_t\}$ 为白噪声序列。

4 用时间序列分析法建立数学模型的一般步骤

本文采用 S.M.Pandit 和 S.M.Wu 提出的一套建立 ARMA(p, q)模型的策略和步骤。他们从分析系统特性出发,采用 ARMA$(n, n-1)$的模型形式对动态数据进行拟合。关于 n 的取值方式,他们建议从 $n = 1$ 开始,按照 ARMA$(2n, 2n-1)$的方式进行。

4.1 模型参数的初估计方法——逆函数法

模型(4)具有逆转形式[2]

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p}{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q} x_t \\ &= (1 - I_1 B - I_2 B^2 - \cdots) x_t \end{aligned} \tag{6}$$

式中,$I_i, i = 1, 2, \cdots$ 称为逆函数。

将(6)式代入(4),得到算子 B 的恒等式

$$1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)(1 - I_1 B - I_2 B^2 - \cdots) \tag{7}$$

比较等式两端 B 的相同幂次, 可以得到

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1 = \theta_1 + I_1 \\
&\varphi_2 = \theta_2 - \theta_1 I_1 + I_2 \\
&\varphi_3 = \theta_3 - \theta_2 I_1 - \theta_1 I_2 + I_3 \\
&\cdots\cdots \\
&\varphi_j = \theta_j - \theta_1 I_{j-1} - \theta_2 I_{j-2} \cdots - \theta_{j-1} I_1 - I_j \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中, 当 $j > q$ 时, 令 $\theta_j = 0$; 当 $i > p$ 时, 令 $\varphi_i = 0$。特别地, 当 $j > \max(p, q)$ 时有

$$(1 - \theta_1 B - \theta_1 B^2 - \cdots - \theta_p B^p) I_j = 0 \tag{9}$$

显然, 若已知逆函数 I_j 的估计值, 则由(8) 式与(9) 式就可以得到 φ_i 与 θ_j 的初估计值。为了求 I_j 的估计值, 考虑自回归模型 AR(p^*)

$$x_t = \varphi_1^* x_{t-1} + \varphi_2^* x_{t-2} + \cdots + \varphi_p^* x_{t-p} + a_t \qquad t = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

将其表示成

$$a_t = x_t - \varphi_1^* x_{t-1} - \varphi_2^* x_{t-2} - \cdots - \varphi_p^* x_{t-p} \qquad t = 1, 2, \cdots, n \tag{11}$$

不难看出, 其逆函数的前 p^* 个值就是它的 p^* 个自回归系数

$$\left.\begin{aligned}
&I_j = \varphi_j^* \qquad j \le p \\
&I_j = 0 \qquad j > p
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

对于自回归模型, 其系数可用 Yule-Walker 方程求解得出[2]。Y-W 方程如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1^* \\ \hat{\varphi}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix} \tag{13}$$

只要将自相关函数 $\hat{\rho}_i (I = 1, 2, \cdots, p^*)$ 求出, 即可求得 $\varphi_j^* (j = 1, 2, \cdots, p^*)$。这样, 从 AR($p^*$) 模型求得 I_j 的估计, 再利用(9) 式和(8) 式, 便可得到 $\hat{\theta}_j (j = 1, 2, \cdots, q)$ 和 $\hat{\varphi}_i (i = 1, 2, \cdots, p)$。

4.2 模型参数的进一步调整

用逆函数法求得的模型参数的初估计, 并不一定能保证它们满足可逆性条件。我们可对其作适当调整后, 使之既满足可逆性条件, 又能保持动态系统的特性。

今设 ARMA 模型初估计的滑动平均部分为

$$\begin{aligned}
\theta(B) &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) \\
&= (1 - \mu_1 B)(1 - \mu_2 B) \cdots (1 - \mu_q B)
\end{aligned} \tag{14}$$

模型可逆当且仅当 $|\mu_i| < 1$ 时成立[2]。如果那些模大于 1 的根用其倒数来代替, 那么产生的 $\theta^*(B)$ 既满足可逆性, 又能保持模型的统计特性不变。这样, 问题就转化为已知方程的根反求方程系数的问题。所求出的系数就可作为模型参数的初估计值。

4.3 模型参数的精估计——非线性最小二乘法

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是均值未知的平稳数字序列, 满足 ARMA (p, q) 模型

$$\tilde{x}_t - \varphi_1 \tilde{x}_{t-1} - \varphi_2 \tilde{x}_{t-2} - \cdots - \varphi_p \tilde{x}_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\tilde{x}_t = x_t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = x_t - \mu \tag{15}$$

非线性函数

$$f_t(\vec{x}_t, \vec{\theta}) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \tilde{x}_{t-1} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i} \qquad p + 1 \le t \le n \tag{16}$$

待估计参数

$$\vec{\theta}_t = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q, \mu) \tag{17}$$

残差量

$$y_t^* = a_t = \tilde{x}_t - f_t(\vec{x}_t, \vec{\theta}) \tag{18}$$

残差平方和

$$S(\vec{\theta}) = \sum_{t=p+1}^{n} y_t^{*2} \tag{19}$$

参数迭代公式

$$\vec{\theta}' = \vec{\theta}^0 + (\vec{X}'\vec{X} + PI)^{-1}\vec{X}'\vec{y} \tag{20}$$

其中, $\vec{\theta}^0$ 为初始参数, $\vec{\theta}'$为迭代参数, P 为阻尼因子。

结束迭代的条件为以下三者之一满足, 即

(1) 迭代次数超过预定值;

(2) 前后两次迭代结果的全部参数满足

$$\left|\frac{\vec{\theta}^{k+1} - \vec{\theta}^{k}}{\vec{\theta}^{k+1}}\right| < \text{某给定值 } \epsilon_1 \tag{21}$$

(3) 前后两次拟合残差平方和的相对改善满足

$$\left|\frac{SSNEW - SSOLD}{SSNEW}\right| < \text{某给定值 } \epsilon_2 \tag{22}$$

或连续三次迭代而无改善 ($SSNEW = SSOLD$)。

4.4　模型适用性检验——F-检验

设模型(1)和模型(2)的残差平方和分别为 σ_1^2 和 σ_2^2, 适用模型的残差平方和为 σ_a^2, 检验模型(1)的适用性的 F-检验步骤如下:

(1) 建立统计假设

原假设 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_a^2$

备择假设 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_a^2$

(2) 构造检验统计量

$$F = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{s} \div \frac{\sigma_2^2}{n - r} \tag{23}$$

式中

$$s = \Delta p + \Delta p$$

$$r = p + \Delta p + q + \Delta q$$

如果 H_0 为真, 则有

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_a^2} \sim x^2(n - p - q) \qquad \frac{\sigma_2^2}{\sigma_a^2} \sim x^2(n - r) \qquad \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_a^2} \sim x^2(S) \tag{24}$$

且统计量F 服从第一自由度为s,第二自由度为$n-r$ 的F 分布,即$F\sim F(s,n-r)$。

(3)确定显著性水平,找出统计量F的临界F_α和拒绝域,并作出检验结论。若$F>F_\alpha$,则拒绝原假设,接受备责假设。若$F<F_\alpha$,则接受原假设,增加参数不必要,模型(1)为适用模型。

5 结 果

我们用时间序列分析方法对利用六分力试验台测得的一组数据进行了处理和建模,所得结果如下。

Table 1 Data processing result

Parameter	ARMA Model	
	ARMA(2, 1)	ARMA(4,3)
φ_1	1.025991	2.796623
φ_2	-0.621244	-3.502476
φ_3		2.353502
φ_4		-0.672620
θ_1	-0.109469	1.839959
θ_2		-0.368982
θ_3		0.492253
F	-0.649320	
F_α	2.37	
Final Model	ARMA(2, 1)	

最终模型为:

$$x_t-1.026x_{t-1}+0.621x_{t-2}=a_t+0.109a_{t-1} \tag{25}$$

从结果可以看出所得模型为二阶模型,这与理论上验证的系统属于二阶模型是吻合的。有了数学模型,我们就可以对六分力试验台的特性进行分析,如我们可以求解出系统的频率为$f=101.67\text{Hz}$,阻尼比为$\xi=0.266$,这对于以后改进结构将起一定的作用。

参 考 文 献

1 杨位钦,顾岚著.时间序列分析和动态数据建模.北京:北京工业出版社,1986

2 项静恬,杜金观,史久恩.动态数据处理——时间序列分析.北京:北京气象出版社,1986

3 甘仞初.动态数据的统计分析.北京:北京理工大学出版社,1991

4 潘迪特S M,吴贤铭.时间序列及系统分析与应用.北京:北京机械工业出版社,1988

Application of the Time Series Analysis Method to Six-component Test Set

ZHANG Hong-Wei
(*Beijing Institute of Tracking and Telecommunications Technology, Beijing* 100094)

Abstract

Thrust misalignment is one of the factors of effecting closeness of rocket, the six-component test set can measure thrust misalignment. The basic principle of six-component test set and the general step of modeling with time series analysis method is presented and data processing and modeling is carried out to understand the set's dynamic character in this paper. Result of modeling is ARMA(2, 1), it accord with the result of theoretical analysis. Frequency and damping ratio can be gotten by analyzing model, it will provide some help to improve the configuration of the six-component test set.

Key word: Thrust misalignment, Time series analysis, Six-component test set, ARMA model

张洪伟 男, 1996年毕业于南京理工大学, 现在北京跟踪与通信技术研究所工作, 主要从事测量设备的总体技术工作。