

二元光栅衍射特性的矢量理论分析

樊叔维

(中国科学院长春光学精密机械研究所应用光学国家重点实验室 长春 130022)

摘要 根据麦克斯韦基本方程组,推导了描述二元光栅衍射特性的矢量理论分析方法——严格的耦合波方法,给出了TE、TM两种偏振模式入射下的耦合波方程。应用该方法对二元位相光栅的衍射特性进行了分析,验证了该方法的收敛性及准确性。讨论了光栅周期、光栅深度、入射波入射角度等参数对光栅衍射特性的影响。

关键词 二元光学 矢量理论 位相光栅 衍射特性分析

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A

1 引言

随着计算机精密光学设计与微电子工艺技术的发展,二元光学作为光学学科的一个分支受到广泛的关注^[1]。二元光的理论基础是光的衍射理论,目前,光的标量衍射理论较为成熟,但它只适用于表面结构特征尺寸远大于波长的光学元件。当表面结构尺寸与波长相当时,标量衍射理论的假设条件已经不能满足,这时就需要采用严格的电磁矢量衍射理论来分析其衍射场^[2]。

本文采用矢量理论——严格的耦合波理论分析了二元位相光栅在入射平面波分别为TE(电矢量与刻槽平行)、TM(磁矢量与刻槽平行)两种偏振模式下的衍射特性,给出了光栅周期、光栅深度、入射波入射角度等参数与谐波次数对耦合波方法收敛性及光栅衍射特性的影响。

2 理论分析

求解光栅衍射场的矢量理论的一般方法就是求解在入射区域、光栅区域以及透射区域内满足电磁场边界条件的麦克斯韦基本方程组的解,而严格的耦合波方法正给出了光栅衍射电磁场边值问题的麦克斯韦基本方程组的精确解,它主要包括三个步骤:1)由麦克斯韦基本方程

组求得入射区域及透射区域电磁场解的表达式; 2) 光栅区域内介电常数及电磁场的傅立叶级数展开, 并由麦克斯韦基本方程推导出耦合波微分方程组; 3) 在不同区域边界面上运用电磁场边界条件, 通过一定的数学方法求得各级衍射波的振幅及衍射效率。

本文分析的浮雕型二元相位光栅的衍射问题如图 1 所示。一平面波以入射角 θ 入射, 则光栅将产生各级反射波及透射波, 如图 1 所示。反射区域及透射区域的介电常数分别为 ϵ_1, ϵ_3 , 光栅区域包含了两种介质的周期分布, 其介电常数为一周函数, 故可将介电常数用傅立叶级数展开:

$$\epsilon(x) = \epsilon(x + \Lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \epsilon_i \exp(j \frac{2\pi i}{\Lambda} x)$$

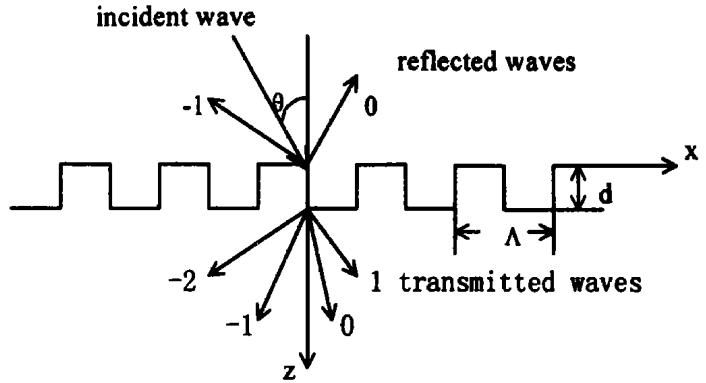


Fig. 1 Geometry for the binary phase grating diffraction problem

2.1 TE 偏振

对于 TE 偏振, 电场矢量平行于刻槽方向, 入射平面波的波长为 λ , 则入射波电场可以表示为:

$$E_0 = \exp[-j(k_{0x}x + k_{0z}z)] \quad (1)$$

在入射区及透射区, 介电常数为常数, 可以直接求得在这两个区域内的电场分布为:

$$E_1 = E_0 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_i \exp[-j(k_{ix}x - k_{1zi}z)] \quad (2)$$

$$E_3 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} T_i \exp\{-j[k_{ix}x - k_{3zi}(z - d)]\} \quad (3)$$

其中: $k_{0x} = k_0 \sin\theta$; $k_{0z} = k_0 \cos\theta$; $k_0 = 2\pi/\lambda$; λ 为自由空间光波长。

$k_i = k_{0x} - ik_0\Lambda$; k_i 为第 i 级衍射波矢的 x 分量。

$$k_{1zi} = \begin{cases} \left[\left(\frac{k_0}{\epsilon_1} \right)^2 - k_i^2 \right]^{1/2} & k_0/\epsilon_1 > k_i \\ -j \left[k_i^2 - \left(\frac{k_0}{\epsilon_1} \right)^2 \right]^{1/2} & k_0/\epsilon_1 < k_i \end{cases};$$

k_{1zi} 为入射区域第 i 级衍射波矢的 z 分量; R_i 为第 i 级反射衍射波的振幅;

$$k_{3zi} = \begin{cases} \left[\left(\frac{k_0}{\epsilon_3} \right)^2 - k_i^2 \right]^{1/2} & k_0/\epsilon_3 > k_i \\ -j \left[k_i^2 - \left(\frac{k_0}{\epsilon_3} \right)^2 \right]^{1/2} & k_0/\epsilon_3 < k_i \end{cases};$$

k_{3zi} 为透射区域第 i 级衍射波矢的 z 分量; T_i 为第 i 级透射衍射波的振幅;

在光栅区域, 电场, 磁场可以表示为空间谐波的傅立叶级数展开:

$$E_{2y} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_i(z) \exp(-jk_ix) \quad (4)$$

$V_i(z)$ 为第 i 级电场空间谐波的振幅;

$$H_{2x} = -j \sum_{i=-\infty}^{\infty} \epsilon_0 / \mu_0 U_i(z) \exp(-jk_ix) \quad (5)$$

$U_i(z)$ 为第 i 级磁场空间谐波的振幅;

在光栅区域, 场振幅必须满足麦克斯韦基本方程组:

$$\frac{\partial E_{2y}}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_{2x} \quad \frac{\partial H_{2x}}{\partial z} = j\omega\epsilon_0 E_{2y} + \frac{\partial H_{2z}}{\partial x} \quad (6)$$

将(4), (5)式代入(6)经过一系列数学推导, 得到一组耦合波方程:

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = k_i V_i - k_{n-}^2 \epsilon_{i-n} V_n \quad (7)$$

由(7)式可以看出, 对于每一级 V_i 均有相邻级电场 V_n 相互作用, 故该式称为耦合波方程组。

该耦合波方程可采用本征值法^[4]求解。

在入射区域与光栅区域的边界面上, 有:

$$\begin{aligned} \delta_0 + R_i &= V_i(0) \\ j[k_{0z} - k_{1z}R] &= -k_0 U_i(0) \end{aligned} \quad (8)$$

在光栅区域与透射区域的边界面上, 有:

$$\begin{aligned} T_i &= V_i(d) \\ jk_{3zi} T_i &= -k_0 U_i(d) \end{aligned} \quad (9)$$

由耦合波方程组及边界条件可以求得 R_i, T_i 。则反射区及透射区的各级衍射波的衍射效率为:

$$\begin{aligned} \text{eff} r_i &= |R_i|^2 \text{Re}[k_{1zi} / (k_0 \epsilon_i^{1/2} \cos \theta)] \\ \text{eff} t_i &= |T_i|^2 \text{Re}[k_{3zi} / (k_0 \epsilon_i^{1/2} \cos \theta)] \end{aligned} \quad (10)$$

对于完全透明介质, 不考虑吸收损耗, 则各级次衍射效率的总和应为 1, 即有:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{eff} r_i + \text{eff} t_i = 1 \quad (11)$$

2.2 TM 偏振

对于 TM 偏振, 磁场矢量平行于刻槽方向, 则入射波磁场可以表示为:

$$H_0 = \exp[-j(k_{0xz} + k_{0z}z)] \quad (12)$$

在入射区及透射区, 介电常数为常数, 可以直接求得在这两个区域内的磁场分布为:

$$H_1 = H_0 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_i \exp[-j(k_{ix} - k_{1zi}z)] \quad (13)$$

$$H_3 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} T_i \exp\{-j[k_{ix} - k_{3zi}(z - d)]\} \quad (14)$$

其中各参数如前定义。

在光栅区域, 电场, 磁场的傅立叶级数展开为:

$$H_{2y} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i(z) \exp(-jk_ix) \quad (15)$$

$$E_{2x} = -j \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \int_{i=-\infty}^{\infty} V_i(z) \exp(-jk_i x) \quad (16)$$

在光栅区域, 场振幅必须满足麦克斯韦基本方程组:

$$\frac{\partial H_{2y}}{\partial z} = -j\omega\epsilon(x)\epsilon_0 E_{2x} \quad \frac{\partial E_{2x}}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_{2y} + \frac{\partial E_{2y}}{\partial x} \quad (17)$$

将(15), (16)式代入(17)经过一系列数学推导, 得到一组耦合波方程:

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_{-n} V_n \quad (18)$$

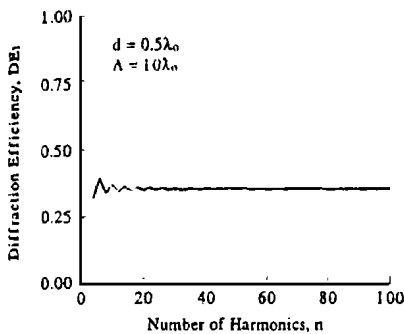
$$\frac{\partial V_i}{\partial z} = k_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n \epsilon_{-n}^{-1} U_n - U_i$$

得到耦合波方程组后, 同 TE 偏振情况一样, 采用本征值法利用边界条件即可求解耦合波方程组的解, 从而得到 TM 偏振的衍射场分布。TM 偏振下的衍射效率为:

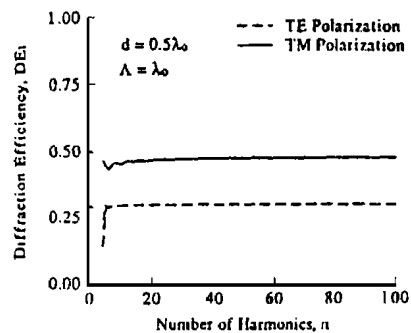
$$\begin{aligned} \text{eff}_{ri} &= |R_i|^2 \text{Re} \left[\frac{k_{1zi}}{k_{0x}} \right] \\ \text{eff}_{ti} &= |T_i|^2 \text{Re} \left[\frac{k_{3zi}}{\epsilon} \right] / \left(\frac{k_{0x}}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

3 数值分析

验证一个算法是否数值稳定, 该算法应满足条件: 1) 算法中保留任意级谐波, 计算结果都应满足能量守恒定理; 2) 对任意给定的光栅参数, 随着算法中保留的谐波次数的增加, 各级衍射波的衍射效率将趋于一个稳定值。首先应用本文编制的程序对一给定入射波参数及光栅参数的衍射问题进行了计算, 并将计算结果与文献[3]进行了比较, 如图2所示, 图2a中为文献[3]计算结果, 图2b为本文计算结果, 可见, 二者计算结果相当吻合, 并且满足上述两个条件。



(a)



(b)

Fig. 2a Diffraction efficiency dependence on the number of space Harmonics of Ref[3] ($n_1 = n_2 = 2.04$, $\theta = 10$ degree)

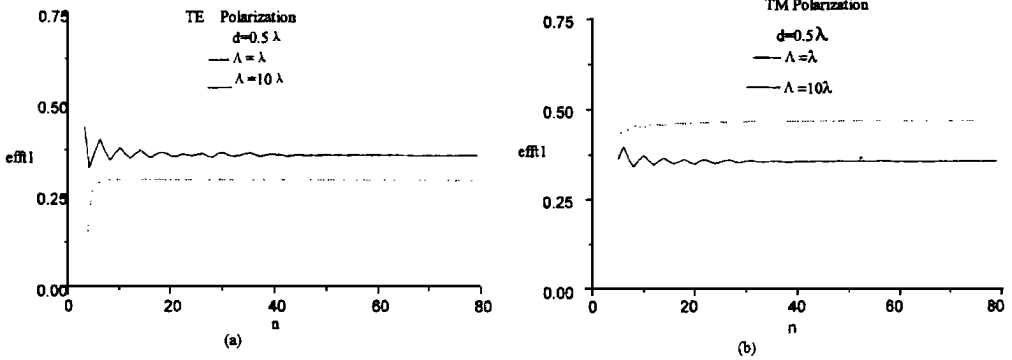


Fig. 2b Diffraction efficiency dependence on the number of space Harmonics. ($n_1 = n_2 = 2.04$, $\theta = 10$ degree)

严格的耦合波方法由麦克斯韦基本方程组及电磁场边界连续条件推导得出, 推导过程中未作任何近似处理, 因此它是一种严格的矢量理论方法。应用严格的耦合波方法, 可以求解在任意入射角下, 任意大小的光栅周期及光栅深度的光栅衍射问题。图 3 给出了衍射级次的截断范围对耦合波方法收敛特性的影响; 图 4 给出了入射角对光栅衍射特性的影响; 图 5 给出了入射波周期对衍射特性的影响; 图 6 给出了光栅深度对衍射特性的影响。各图均考虑了 TE 偏振与 TM 偏振。从计算结果可知, 算法中保留任意级谐波, 计算结果都满足能量守恒定理。但是对于各级谐波的衍射效率的精度, 则与衍射级次的截断范围密切相关, 由图 3 可见, 光栅深度较大时, 对于 TM 偏振, 衍射级次的截断范围要求较 TE 偏振要宽得多; 由图 4 可知, 入射波的入射

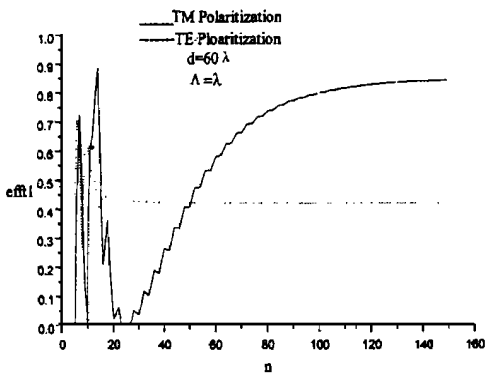


Fig. 3 Diffraction efficiency dependence on the number of space Harmonics. ($n_1 = n_2 = 2.04$, $\theta = 30$ degree)

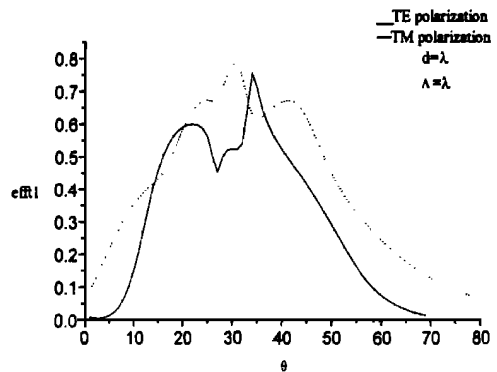


Fig. 4 Diffraction efficiency dependence on incident angle ($n_1 = n_2 = 2.04$)

角的变化对衍射效率的影响很大: 不同的入射方向, 衍射效率产生很大变化, 最大值可接近

80%, 而最小值接近 0; 由图 5 可见, 当光栅周期小于 5~7 倍波长时, 各级衍射效率变化很剧烈, 当光栅周期大于 10 倍波长时, 各级衍射效率变化平稳, 逐渐趋于稳定值, 并且该稳定值应与标量衍射理论的计算结果相吻合; 由图 6 可以看出, 对不同的偏振状态, 光栅深度对衍射效率的影响相似, 即衍射效率随光栅深度的变化呈有规律的周期性变化。

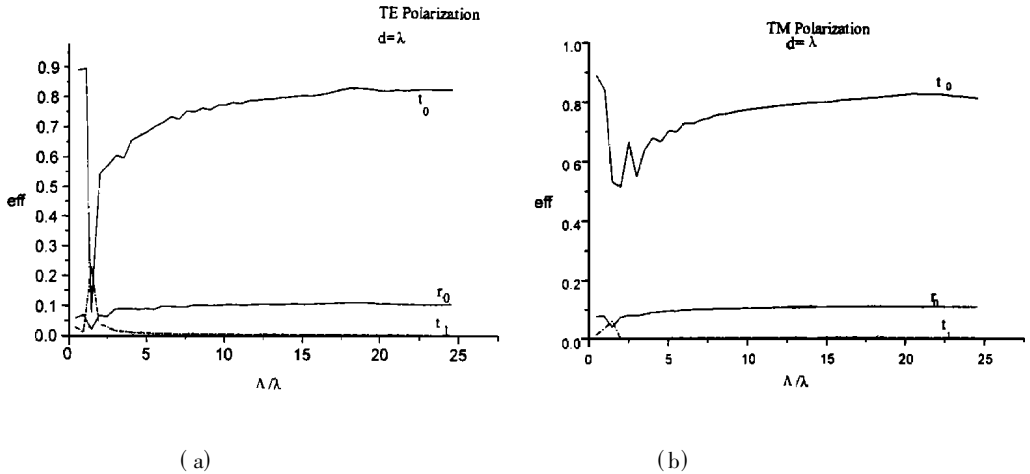


Fig. 5 Diffraction efficiency dependence on the grating period
($n_1 = n_2 = 2.04, \theta = 0$ degree)

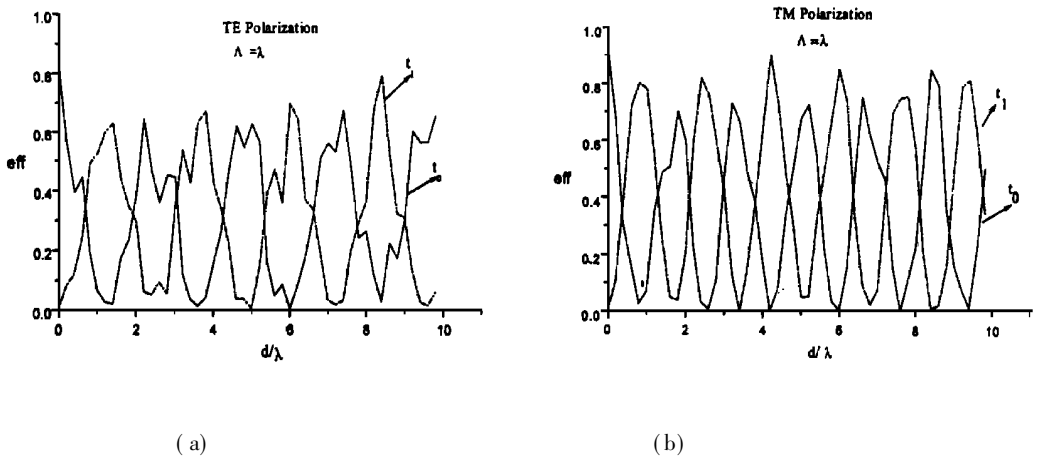


Fig. 6 Diffraction efficiency dependence on grating depth for the zero and first order transmitted waves. ($n_1 = n_2 = 2.04, \theta = 30$ degree)

4 结 论

严格的耦合波方法是描述二元光栅衍射特性的矢量理论分析方法, 本文给出了 TE, TM 两种偏振模式入射情况下的严格的耦合波方程。并通过数值计算验证了该方法的收敛性及准确性, 其计算精度决定于衍射级次的截断范围; 对任意给定结构参数的光栅进行衍射特性计算

时,从未发生过数值不稳定问题,实际计算表明严格的耦合波方法是一种稳定、有效的矢量理论分析方法。对二元位相光栅的衍射特性进行了分析,给出了光栅周期、光栅深度、入射波入射角度等参数利用该方法对光栅衍射特性的影响。

参 考 文 献

- 1 Veldkamp W B, et al. Binary optics. Scientific American, 1992, 266(5):92~97
- 2 Perit R. Electromagnetic Theory of Gratings. Berlin Springer-Verlag, 1980
- 3 Moharam M G, et al. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. J Opt Soc Am A, 1995, 12(5):1068~1076
- 4 E G, et al. Linear systems analysis. New York, McGraw-Hill: 1975

The Vector Theory Analysis of Binary Gratings Diffraction Characteristics

FAN Shu-Wei

(The State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

Abstract

Based on the Maxwell equation and the boundary continuity of electromagnetic field, the vector theory analysis method—the rigorous coupled-wave analysis technique for describing the diffraction of electromagnetic waves by binary gratings for both TE and TM polarization is presented. By using the rigorous coupled-wave theory the diffraction characteristics of the binary phase gratings are analyzed. The examples demonstrate the accuracy and the stability of the rigorous coupled-wave method. The effects of grating period, the grating depth, and incident angle on the grating diffraction characteristics are investigated.

Key words: Binary optics, Vector theory, Couple-wave, Phase gratings, Diffraction analysis

樊叔维 女, 1968年生。1989年毕业于西安交通大学, 1997年在该校获得博士学位。现为中国科学院长春光机所博士后。