

弹性导轨受力变形分析计算

周明宝

(中国科学院光电技术研究所 成都 610209)

摘要 推导了平行四边形型弹性导轨在外力作用下产生变形的计算公式。从理论上比较并通过具体设计验证了公式的正确性。这些公式对任何尺寸的弹性导轨都是适用的。

关键词 弹性导轨 弹性变形

1 引言

弹性导轨是一种精密的既能支撑又能导向的微位移导轨。这种导轨具有较高的位移分辨率(可达 $1\mu\text{m}$)和较高的导向精度,没有机械摩擦、没有间隙、不需要润滑、不存在爬行现象,而且结构紧凑,体积小,重量轻,易于加工装配。因此,弹性导轨在精密定位中得到广泛的应用。

弹性导轨在外力作用下产生弹性变形。一般情况下,外力与变形的关系往往是根据经验估算的。精确推导变形计算公式是困难的。1965年, J. M. Paros 推导了 $R \gg t$ 条件下的计算公式^[1];清华大学精密仪器及机械学系在设计微位移工作台系统时利用数值积分方法推导了 $R \sim t$ 条件下的计算公式^[2]。这些公式都是近似的并且具有一定的局限性。本文推导了在任何条件下通用的并且是精确的弹性导轨变形计算公式。

2 弹性导轨受力分析

如图1所示的弹性导轨是一种平行四边形机构,由四个铰链组成。在外力作用下,铰链产生弹性变形。由于导轨上其他部分比较链厚得多,因此,可看作刚体,不产生变形。这样,导轨受力时,与铰链相连的工作台作平移运动。

对铰链而言,它不仅受到外力 $F = 2P$ 的作用,而且还受到一个由刚体产生的附加力矩 M_0 的作用。在外力 F 和力矩 M_0 共同作用下,铰链 A 上的横切面受到的弯矩为:

$$M(x) = -p(L + 2R + \Delta - x) + M_0 \quad (1)$$

铰链 B 上的横切面受到的弯矩为:

$$M(x') = -p(\Delta - x') + M_0 \quad (2)$$

弹性导轨在外力作用下平动,因此铰链 A 左端面与铰链 B 右端面不产生转动,而铰链 A 右端面与铰链 B 左端面转动方向相反、转角大小相等。整个铰链 A 和整个 B 变形方向相反、形状相同。也就是,如果 $x = -x'$, 那么 $M(x) = -M(x')$ 。据此,求得 M_0 为:

$$M_0 = p\Delta + p(L + 2R)/2 \quad (3)$$

将 M_0 代入(1)式,铰链 A 上横切面受到弯矩为:

$$M(x) = px - p(L + 2R)/2 \quad (4)$$

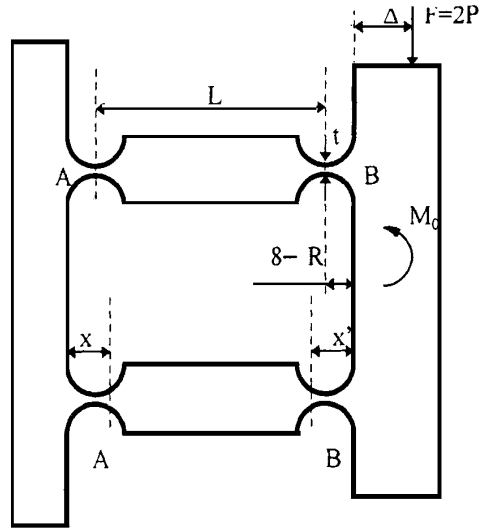


Fig. 1 Computation diagram of rectangle-type flexible guide's deformation

3 弹性导轨铰链转角计算

为了计算铰链的转角,可将铰链看成是一端固定的悬臂梁。根据材料力学理论^[3],梁的转角与弯矩之间的关系为:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (5)$$

式中, b 为铰链材料的弹性模量, I 为梁横截面的惯性矩,铰链截面为方形时,其对应的 I 为:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (6)$$

式中, b 为铰链的厚度, h 为铰链某一处的宽度,且

$$h = t + 2R - 2 \sqrt{x(2R - x)} \quad (7)$$

将(4)式、(6)式、(7)式代入(5)式,铰链上某一位置 x 处的转角为:

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{12M(x)}{Eb[t + 2R - 2\sqrt{x(2R - x)}]^3} dx \quad (8)$$

令 $x = 2R \cos^2(\frac{\varphi}{2})$, 对上式进行变量替换,并取 $x = 2R$, 从(8)式推导出铰链 A 右端面的转角为:

$$\theta(2R) = -\frac{6pR}{Eb} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2R \cos \varphi + L) \sin \varphi}{[t + 2R - 2R \sin \varphi]^3} d\varphi \quad (9)$$

对上式积分进行复杂的变换和计算后,得到:

$$\theta(2R) = - \frac{3pL}{4EbR^2} \left[\frac{2\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 - 1)^2} + \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) \frac{3\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2 \lambda^2 - 1} \right] \quad (10)$$

式中, $\lambda = 1 + \frac{t}{2R}$ 。令,

$$\eta(\lambda) = \frac{2\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 - 1)^2} + \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) \frac{3\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2 \lambda^2 - 1} \quad (11)$$

代入(7)式,得到:

$$\theta(2R) = - \frac{3L\eta(\lambda)}{4EbR^2} P \quad (12)$$

铰链在外力 $F = 2P$ 作用下转动 $\theta(2R)$ 后,工作台转动 δ , 其值为:

$$\delta = L\theta(2R) = - \frac{3L^2\eta(\lambda)}{4EbR^2} P \quad (13)$$

从(12)式、(13)式可知,在外力作用下,铰链转动的角度以及工作台移动的距离与作用力成正比,其特性类似弹簧。相应的弹性系数为:

$$k = F/\delta = \frac{8EbR^2}{3L^3\eta(\lambda)} \quad (14)$$

4 公式验证及讨论

(1) $R \gg t$ 情形

因为 $R \gg t$, 显然 $\frac{t}{2R} = c \ll 1$, 此时可取近似 $\lambda \approx 1, \lambda^2 \approx 1, \lambda^2 - 1 \approx 2c$, 将这些近似值代入 $\eta(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ 可简化为:

$$\eta(\lambda) = \frac{2\lambda^2 + 1}{\lambda(\lambda^2 - 1)^2} + \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) \frac{3\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2 \lambda^2 - 1} \approx \frac{3\pi}{4c^2} = 3\pi R^{\frac{5}{2}} t^{-\frac{5}{2}} \quad (15)$$

代入(1)式得:

$$k = \frac{8Eb t^{5/2}}{9\pi L^2 R^{1/2}} \quad (16)$$

此结果与 J. M. Paros 推导出的 $R \gg t$ 条件下的设计公式完全相同。

(2) $R \approx t$ 情形

表1列出了 $R \approx t$ 条件下铰链参数取不同值时其弹性系数的理论计算值, 计算中铰链材料采用60Si2Mn, 其中弹性模量 E 数值为 $4.6476 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 。表中前一列弹性系数计算值 k_1 是用(14)式算出的, 后一列弹性系数计算值 k_2 是根据参考文献[2]所述的数值积分的方法得到的。参考文献[2]中所列的数值积分值是 α 值, α 值与本文的弹性系数 k 的关系为:

$$k = \frac{4}{L^2} \alpha Eb \quad (17)$$

表1中后一列所列的弹性系数计算值就是由参考文献[2]给出的 α 值通过上式算出的。

Table 1: Comparison of two design methods at $R \gg t$

No.	width (b)	length (L)	radius (R)	thickness (t)	λ	$\eta(\lambda)$	k_1	α	k_2
	mm	mm	mm	mm			N/m		N/m
1	10.0	50.0	1.0	1.5	1.75	2.8297	175194	0.24	178467
2	20.0	25.0	1.0	3.0	2.50	0.4313	9194581	1.6	9518244
3	5.00	75.0	1.5	1.5	1.50	8.2727	39962.5	0.18	29744.5
4	12.5	40.0	1.5	3.0	2.00	1.3061	1667941	1.2	1742843
5	15.0	80.0	2.0	2.0	1.50	8.2727	140449	0.32	139427

比较两列弹性系数计算值可见,两种方法所得结果基本一致,平均偏差为 $\pm 1.775\%$ 。

本节我们针对 $R \gg t$ 和 $R \approx t$ 两种不同情况,用不同计算方法进行了比较验证,结果表明,本文推导出的公式是正确的。

5 设计验证

我们设计了数套不同参数的弹性铰链导轨,其结构参数及弹性系数的理论计算值和实测值如表2所示。从表2可看出,理论计算与实测值基本吻合,误差不大于 $+2\%$ 。

Table 2 Parameters of several designed flexible guides

No.	width (b)	length (L)	radius (R)	thickness (t)	designed k	measured k
	mm	mm	mm	mm	N/m	N/m
1	10	20	2.5	0.25	25164.6	25614.0
2	10	25	2.5	0.50	91105.6	92472.6
3	12	18	5.0	0.60	235234	239468.2
4	12	40	5.0	0.80	97784.8	10000.0
5	5	80	2.0	2.0	46816.4	47327.3
6	8	100	1.0	2.5	139294	141079

6 结论

我们根据材料力学理论,推导了弹性导轨在外力作用下产生变形的计算公式。从理论上比较并通过具体设计验证了公式的正确性。同文献[1]和文献[2]推导的公式相比,本文推导的公式更精确、更通用。

参 考 文 献

- 1 Paros J M, Weisbord L. Machine Design. 1965, (25) : 151 ~ 156
- 2 高 宏, 李庆祥, 严普强. 亚微米弹性微位移工作台系统的设计及其精度分析. 清华大学学报(自然科学版) . 1988, 28(5) : 19 ~ 28
- 3 刘鸿文主编. 材料力学. 北京: 人民教育出版社, 1980

Computation of Flexible Guide's Deformation

ZHOU Ming-Bao

*(Institute of Optics & Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)***Abstract**

In the paper, the formulae used to compute the deformation of flexible guides are derived, whose validity has been verified by theoretically comparing and designing. These formulae are valid for arbitrary rectangle-type flexible guides.

Key words: Flexible guides, Deformation

周明宝 男, 1965年12月出生, 1986年毕业于浙江大学, 现为中国科学院光电技术研究所博士研究生。目前主要从事微机械、微光学、微电子单元技术研究。