

软弹滚体线接触的边界元分析

王建设

(中国科学院长春光学精密机械研究所 长春 130022)

摘要 软弹滚体的接触是关于表面附有一层软弹性材料的滚体间的弹流动压润滑问题,它涉及滚体表面的弹性变形与流体压力之间的相互作用。考虑到表面易于出现较大变形和两滚体间的压入啮合量,用普通的模拟方法来研究这种接触问题,在技术上存在着很大的困难。本文应用边界元方法,将流体的动压控制方程和表层弹性变形方程分别转化为边界积分方程,并对这些方程施行迭代运算,从而获得收敛解,对这类接触问题做了研究。研究结果将为结构设计、选择参数值提供指导性的依据,表明这种方法是对这类接触问题进一步研究的一种有效的方法。

关键词 软弹滚体接触,数值模拟,边界元方法

1 前言

在高质量的屏印刷、涂层、纺织、轴承以及医学上人的骨骼关节等许多形式的结构大多数都是由一种被认为是刚性的滚体与另一个中心核是刚体而表面附有一层较软弹性材料的滚体组成的,如图1所示。相接触的这对滚体间要求有一适宜的压入啮合量。滚体运动时将流体带入接触处,此处流体由于其动压效应而形成膜压力,足够的膜压力可以将滚体的两表面分开。流体膜的压力将会引起滚体的弹性层发生变形,改变流体膜的厚度;流体膜厚度的改变

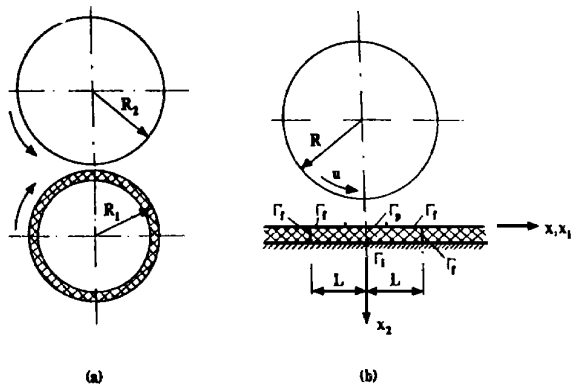


Fig. 1 The two contact models

又将引起流体膜压力的变化。这种接触问题可以作为软弹流动压润滑问题处理。解决这类问题需要建立流体膜的动压模型和滚体表层弹性变形的分析模型,目的是求出流体膜的压力

和弹性层的表面变形。这是一个特殊的接触问题,与常见的接触模型不同。计算表层受压力作用的变形,已不能用普通的方法,按照半无限平面问题处理,而应按有限薄层的情况来考虑建模问题。

对于流体膜压力和表层变形的求解,在物理建模之后,实际上成为各自的控制方程在这种边界条件下的求解问题,并且要求得到是在流体膜压力与表面变形相互作用的前提下的收敛解。所以问题的关键和难度均在于如何把工程分析的数值解法应用到这一问题中来。边界元方法是一种具有强大优势、独具特点的有力工具。鉴于此,本文应用边界元的方法来研究这类接触问题,旨在描述边界元的具体应用方法。

2 控制方程

2.1 接触模型

图 1 表示软弹流动压接触问题,认为滚体 2 是刚性的,滚体 1 的表层是弹性的。与滚体的圆直径尺寸相比,认为接触宽度是相对较小的。用等效有限平面模型和等温条件下的牛顿流体来分析这种接触问题。在描述基本控制方程时采用下面的无量纲量。

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{b}, & X_1 &= \frac{x_1}{R}, & X_2 &= \frac{x_2}{R}, & \bar{e} &= \frac{e}{b} \\ P &= \frac{p}{p_H}, & H &= \frac{R}{b^2}h, & V &= \frac{R}{b^2}U \\ \bar{u}_i &= \frac{R}{b^2}u_i, & \bar{t}_j &= \frac{t_j}{p_H}, & b &= \left(\frac{8\omega R}{\pi E}\right)^{0.5}, & p_H &= \frac{Eb}{4R} \\ U &= \frac{\eta u}{ER}, & W &= \frac{\omega}{ER} \end{aligned}$$

其中: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ——滚体的当量半径;

$E = \frac{2E_1}{1 - \nu^2}$ ——等效弹性模量;

x ——流体膜的坐标;

x_1, x_2 ——滚体弹性表面的坐标;

e ——滚体表面弹性层的厚度;

b ——赫兹接触半宽尺寸;

h ——流体膜厚度;

p ——流体膜的压力;

U ——波桑比;

$u = \frac{u_1 + u_2}{2}$ ——表面平均速度;

w_j ——在 j 方向上的表面位移;

η ——流体动力粘度;

ω ——滚体上单位长度上的载荷;

p_H ——赫兹接触的最大压力;

t_j ——在 x_j 方向上的表面压力;

E_1 ——弹性层的弹性模量;

上标- ——无量纲量符号。

2.2 流体膜运动的压力方程

对于图 1 所示的模型, 在等温条件和牛顿流体的前提下, 控制流体膜运动的雷诺方程为

$$\frac{d}{dX} (H^* \frac{dP}{dX}) + \Psi = 0 \quad (1)$$

式中:

$$H^* = H^3, \Psi = -\frac{3}{4} \frac{\pi^2 U}{W^2} \frac{dH}{dX} \quad (2)$$

问题的边界条件为

$$P(X_a) = P_a = 0$$

$$P(X_b) = P_b = 0$$

$$\frac{dP}{dX} \Big|_{X_b} = P_{nb} = 0 \quad (3)$$

为求式(1)和式(3)的解, 需先求式(1)的基本解, 用 $\delta(X - \zeta)$ 替换式(1)中的 Ψ , 得

$$G(X, \zeta) = \begin{cases} \int_{\zeta}^X (\frac{1}{2H^*}) dX, & X < \zeta \\ - \int_X^{\zeta} (\frac{1}{2H^*}) dX, & X > \zeta \end{cases} \quad (4)$$

用 $G(X, \zeta)$ 作为加权函数对式(1)积分, 得对于 $X_a < \zeta < X_b$ 的压力表达式

$$\begin{aligned} P(\zeta) = & [-H^*(X_a) G(X_a, \zeta), \\ & H^*(X_b) G(X_b, \zeta)] \begin{Bmatrix} P_{na} \\ P_{nb} \end{Bmatrix} + [H^*(X_a) \frac{dG(X, \zeta)}{dX} \Big|_{X=X_a}, \\ & - H^*(X_b) \frac{dG(X, \zeta)}{dX} \Big|_{X=X_b}] \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix} + \int_{X_a}^{X_b} \Psi(X) G(X, \zeta) dX \end{aligned} \quad (5)$$

流体膜入口处和出口处的压力梯度 P_{na} 和 P_{nb} 分别为

$$\begin{aligned} P_{na} &= \frac{1}{H^*(X_b) G(X_b, X_a)} \int_{X_a}^{X_b} \Psi(X) G(X, X_a) dX \\ P_{nb} &= \frac{-1}{H^*(X_a) G(X_a, X_b)} \int_{X_a}^{X_b} \Psi(X) G(X, X_b) dX \end{aligned} \quad (6)$$

2.3 滚体表层的弹性变形方程

将滚体表层接触区求解域的整个边界离散为边界单元如图 2 所示, 单元为两节点的边界元。对于每一单元 Γ^e 上的每一节点 ζ_j , 则平面应变的弹性方程为

$$c_{ij}(\zeta_j) \bar{u}_j(\zeta_j) + \int_{\Gamma} \bar{u}_j(\zeta) T_{ij}(\zeta_j, \zeta) d\Gamma(\zeta) = \int_{\Gamma} \bar{t}_j(\zeta) U_{ij}(\zeta_j, \zeta) d\Gamma(\zeta) \quad (i, j = 1, 2) \quad (7)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \bar{r}}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ij} + 2\bar{r}_{,i} \bar{r}_{,j}] - (1-2\nu) (n_j \bar{r}_{,i} - n_i \bar{r}_{,j}) \right\}$$

$$U_{ij} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)^2} [(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + \bar{r}_{,i} \bar{r}_{,j}] \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= [X_j(\zeta) - X_j(\zeta_0)] [X_j(\zeta) - X_j(\zeta_0)] \\ \bar{r}_{,i} &= \frac{X_i(\zeta) - X_i(\zeta_0)}{\bar{r}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial n} = n_i \bar{r}_{,i}$$

ζ_0 ——边界上正在考虑的节点;

ζ ——边界上被积分的节点;

c_{ij} ——边界上角因素, 其值取决于节点 ζ_0 处局部形状;

u_j ——边界上 X_j 方向的位移;

t_j ——边界上 X_j 方向的压力。

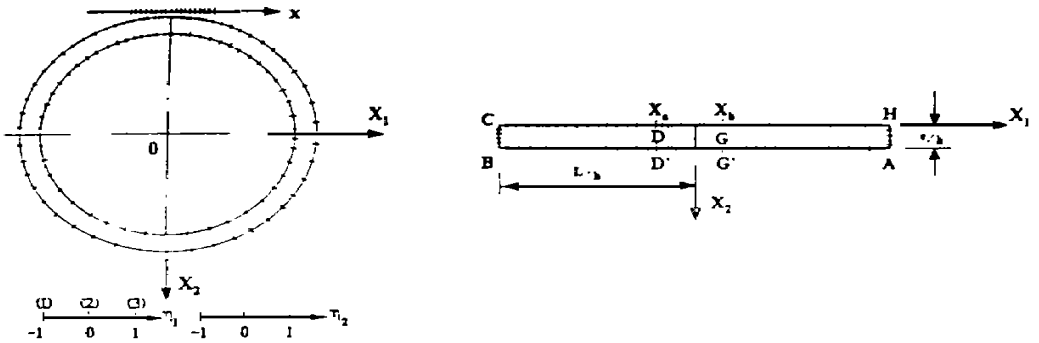


Fig 2. Discretization of the finite plane

边界元为两节点的单元 Γ_e , 关于 Γ_e 上的坐标 ξ , 形函数 N_l 的表达式为

$$N_l = a_l(\xi + b_l), a_l = \begin{cases} -\frac{1}{l_e}, l = 1 \\ \frac{1}{l_e}, l = 2, \end{cases} b_l = \begin{cases} -\xi_2, l = 1 \\ -\xi_1, l = 2 \end{cases} \quad (10)$$

弹性层求解域的边界条件为

内边界上:

$$\bar{u}_j = 0 \quad (j = 1, 2)$$

外边界上:

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_\tau &= 0 \\ \bar{t}_n &= -P \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对式(7)积分, 整理得

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} \quad (12)$$

2.4 流体膜厚方程

流体膜厚方程为

$$H(X) = H_0 + \frac{X^2}{2R} + V(X) + S(X) \quad (13)$$

式中:

H_0 : 压入啮合量, 即不计表层变形时接触中心处两滚体表面之间的距离;

$V(X)$: 接触处表层的表面位移;

$S(X)$: 两滚体表面粗糙度。

2.5 力平衡条件

无量纲压力的积分应满足下列平衡条件

$$\int_{x_a}^{x_b} P dX = \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

3 方程的求解过程

这类接触问题的求解过程是对于每次求得的流体膜压力, 需要求出相对应的弹性层表面的位移, 反复迭代, 以期求得它们的收敛解。对式(12)施加边界条件, 并用高斯消去法, 可降低代数方程的阶数, 只剩下与接触区上节点位移和节点压力相关的低阶代数方程, 这样处理之后可加快求解的速度。

具体求解过程是

① 指定 H_0 的值。对于给定的载荷, 按赫兹压力分布计算 $V(X)$ 的初始值。

② 由式(13) 求出流体膜的厚度 $H(X)$ 。

③ 由式(6)、式(5) 求出流体膜的压力。

④ 由式(12) 求出表层的表面位移 $V(X)$ 。

⑤ 判断 $V(X)$ 是否满足给定的收敛条件, 以及流体膜压力是否满足力平衡条件。否则, 用求得的 $V(X)$ 值, 从步骤(2) 开始重复上述过程, 直到满足上述条件时即可得到其数值解。

4 实例分析结果与讨论

作为一个实例来具体研究这种接触模型, 选用参数的数值如下: 滚体的半径分别为 $R_1 = 0.045\text{m}$, $R_2 = 0.045\text{m}$, 弹性层的厚度 $e = 8\text{mm}$, 表面速度 $u = 1.0\text{ms}^{-1}$, $W = 750$, 波桑比 $\nu = 0.45$, 并考虑表面粗糙度计算得流体膜压力曲线见图 3, 膜厚曲线见图 4。两条曲线形状的差别是表面粗糙度参数取值不同造成的, 说明表面粗糙度对流体膜压力和膜厚的影响是明显的。最小膜厚的位置出现在靠近流体膜承载区的出口端, 膜厚的数值相对来说较大, 曲线形状的变化

较为平缓, 流体膜的压力比较小。这些结果反映了软弹流动压接触问题的特性。

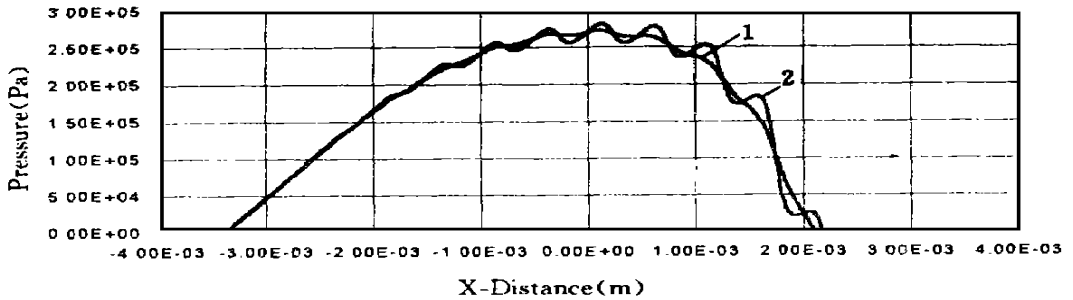


Fig. 3 Film pressure for ink contacts

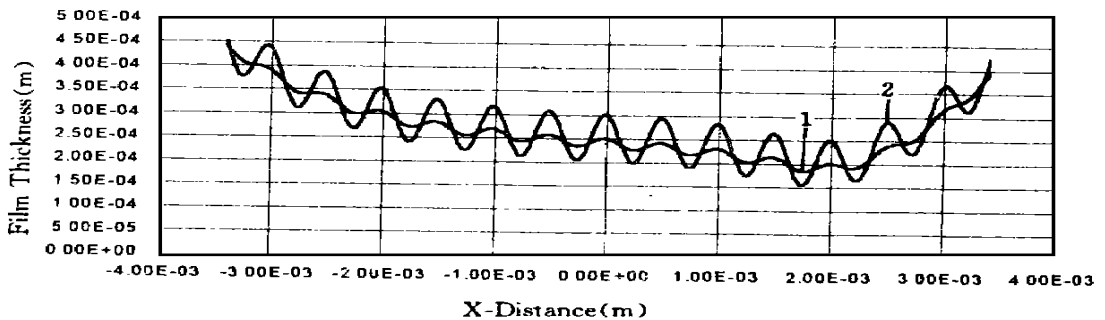


Fig. 4 Film thickness for ink contacts

5 结 束 语

为研究这种软弹流动压接触问题, 提出了关于流体问题、弹性体问题的物理模型和数学模型。应用边界元方法将各自的控制方程转化成边界积分方程。经迭代运算可以快速求得边界上和解域内未知量的数值解。为研究这一类问题提供了一条具体的途径。同时显示出边界元方法的一些优越性。

参 考 文 献

- 1 Hooke C J. The elastohydrodynamic lubrication of a cylinder on an elastomeric layer. *Wear*, 1986, 111. 83 ~ 99.
- 2 Jaffar M J. Two-dimensional elastohydrodynamic lubrication of elastic strips. *Wear*, 1990, 139. 335 ~ 350.
- 3 Jaffar M J, Savage M D. On the numerical solution of line contact problems involving bonded and unbonded strips. *J Strain Analysis*, 1998, 23(2). 67 ~ 79.
- 4 Medley J B, Dowson D, Wright V. Transient elastohydrodynamic lubrication models for the human ankle joint. *Engng in Medicine*, 1984, 13(3). 137 ~ 151
- 5 Hlavacek M, Vokoun D. Lubrication of a cylindrical synovial joint considering rolling motion and elastic incompressible cartilage. *Wear*, 1993, 165(1). 1 ~ 7.

- 6 Banerjee P K, Butterfield R. Boundary element methods in engineering science. (McGraw-Hill, London) 1981
- 7 Brebbia C A. The boundary element method for engineers. (Pentech Press, London) 1978

Analysis of a Soft Elastic Rolling Contact by Boundary Element Method

WANG Jian-She

(*Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,*
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

Abstract

The soft elastic rolling contact is on the elastohydrodynamic lubrication (EHL) of rollers with a elastic layer. It is concerned with the interaction between the deformation of the soft elastomer covering on the roller and fluid pressure. Because the layer is easily deformable, and there is an engagement between the two rollers, the contact is one of the most difficult areas to model successfully using common methods. The hydrodynamic equation is transformed into a form of boundary integral equation and surface distortion is obtained from boundary integral equations in order to achieve the simultaneous iterative solution of the governing equations. The contact behaviour is investigated in this paper by means of boundary element method. The results highlight the main roller train design and operating parameters for the contact, and show that the method is efficient for such layered problems.

Key words: Soft rolling contact, Numerical modelling, Boundary element method

王建设 男, 1958 年 12 月出生, 1989 年于中国科学院长春光机所硕士研究生毕业, 获硕士学位, 1996 年于中国科学院长春光机所博士研究生毕业, 获博士学位, 并荣获 1996 年度中国科学院院长奖学金优秀奖。主要从事机械 CAD、CAE, 机械动力学, 机械设计, 精密角测量仪器, 有限元方法、边界元方法在工程设计中的应用的研究工作。在国内外刊物上发表学术论文 20 余篇。