

# 剃齿刀齿面造型理论及其分析

刘 琼, 宾鸿赞

(华中理工大学机械科学与工程学院, 湖北武汉 430074)

摘要: 从齿轮啮合原理入手, 导出了单自由度的径向剃齿刀的齿面方程, 与双自由度的普通剃齿刀齿面方程; 分析并阐述了径向剃齿法与普通剃齿法在啮合原理上的区别; 通过对相同参数条件下径向剃齿刀和普通剃齿刀的比较, 得出了若干结论, 为径向剃齿刀的设计提供了理论依据。

关键词: 径向剃齿; 径向剃齿刀; 齿面造型

中图分类号: TH132.41 文献标识码: A

## 1 引 言

在一般的剃齿方法中, 剃齿刀与被剃齿轮为点接触, 相当于一对螺旋齿轮啮合, 一把剃齿刀可剃同模数的多种齿轮。为了剃出全齿面, 剃齿机工作台必须有轴向、斜向或者切向的进给运动。而在径向剃齿中没有上述的进给运动, 只用刀具相对工件的径向进给运动, 那么被剃齿轮齿面是怎样得到的呢?

## 2 径向剃齿刀与普通剃齿刀齿面的造型理论

建立径向剃齿法与普通剃齿的坐标系如图1和图2所示。动坐标系  $\sigma_1(o_1 - x_1y_1z_1)$  和  $\sigma_2(o_2 - x_2y_2z_2)$  分别与被剃齿轮和剃刀相固联, 且  $z_1, z_2$  分别与各自的轴线重合; 固定坐标系  $\sigma_{10}(o_1 - x_{10}y_{10}z_{10})$  和  $\sigma_{20}(o_2 - x_{20}y_{20}z_{20})$  分别是动坐标系  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的起始位置; 原点  $o_1, o_2$  分别是被剃齿轮和剃齿刀轴线的公垂线垂足,  $z_1, z_2$  两轴线夹角为  $\theta$ , 中心距为  $a$ 。

在工件坐标系  $\sigma_1$  中给出被加工齿轮齿面  $\xi(1)$  的渐开螺旋面方程:

$$\begin{cases} x_1 = r_m [\cos(\mu_1 + \theta_1) + \mu_1 \sin(\mu_1 + \theta_1)] \\ y_1 = r_m [\sin(\mu_1 + \theta_1) + \mu_1 \cos(\mu_1 + \theta_1)] \\ z_1 = p_1 \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中参变量  $\theta_1$  表示母线从起始位置绕  $z_1$  轴转过的角度; 参变量  $\mu_1$  表示渐开线上不同点的位置的

参变量;  $p_1$  为螺旋参数, 它表示母线绕  $z_1$  轴转过的单位角度时, 沿轴线方向移动的距离, 且  $p_1 = rb_1 / \tan(\beta_{b1})$ ;  $\beta_{b1}$  为基圆螺旋角,  $rb_1$  为基圆半径。

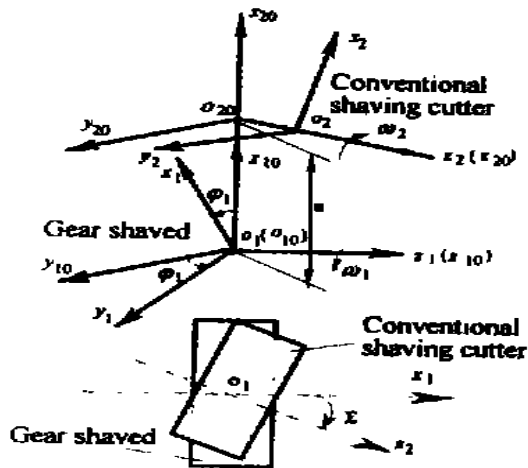


Fig. 1 Coordinate of conventional shaving

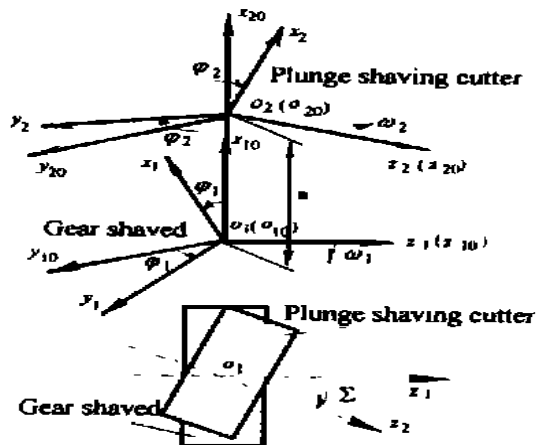


Fig. 2 Coordinate of plunge shaving

在一般的剃齿方法中,剃齿刀相当于一个圆柱渐开线螺旋齿轮,和被剃齿轮的啮合呈点接触,为了剃出整个齿面,工件轴线必须在刀具轴线和工件轴线的平行平面中移动。假设剃刀齿面除绕轴线的转动外,还作用着一个沿自身轴线的螺旋运动。所谓沿螺旋面自身的运动,就是它在绕本身轴线转动一圈的同时,沿轴线方向恰好移动了一个本身的导程。不难想象,螺旋面在作这种运动时,它上面的各点都沿着表面自身前进,整个螺旋

$$\begin{cases} x_2 = (r_{b1} \cos \Psi_{22} + r_{b1} \mu_1 \cos \sin \Psi_{22}) \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) + p_1 \theta_1 \sin \sin \Psi_{22} + \\ \quad (r_{b1} \mu_1 \cos \Psi_{22} - r_{b1} \cos \sin \Psi_{22}) \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - a \cos \Psi_{22} \\ y_2 = (r_{b1} \cos \cos \Psi_{22} + r_{b1} \mu_1 \sin \Psi_{22}) \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - a \sin \Psi_{22} + \\ \quad (r_{b1} \sin \Psi_{22} - r_{b1} \mu_1 \cos \cos \Psi_{22}) \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - p_1 \theta_1 \sin \cos \Psi_{22} \\ z_2 = r_{b1} \sin \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - r_{b1} \mu_1 \sin \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) + p_1 \theta_1 \cos - l_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\Psi_{22}$  表示在被剃齿轮转过  $\varphi$  角的同时,剃刀齿面  $\xi(2)$  转过的角度。

根据齿轮啮合原理的运动法可知:两齿面在切点处的相对运动速度  $v_{12}$  则必然和公法线垂直,即:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_{12} = 0 \quad (3)$$

由于  $\omega$  与  $V_{02}$  是相互独立的,上式只有在有关  $\omega$  与  $V_{02}$  的两个关系式均为零时才能成立,将方程

$$\begin{cases} x_2 = (r_{b1} \cos \varphi + r_{b1} \mu_1 \cos \sin \varphi) \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - a \cos \varphi + \\ \quad (r_{b1} \mu_1 \cos \varphi - r_{b1} \cos \sin \varphi) \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) + p_1 \theta_1 \sin \sin \varphi \\ y_2 = (r_{b1} \mu_1 \sin \varphi + r_{b1} \cos \cos \varphi) \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - a \sin \varphi + \\ \quad (r_{b1} \sin \varphi - r_{b1} \mu_1 \cos \cos \varphi) \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - p_1 \theta_1 \sin \cos \varphi \\ z_2 = r_{b1} \sin \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - r_{b1} \mu_1 \sin \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) + p_1 \theta_1 \cos \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\varphi = \varphi / i_{12}$  此时的啮合方程为:

$$\begin{aligned} & (a \cos \cos \beta_{b1} - r_{b1} \sin \sin \beta_{b1}) \cdot \\ & \cos(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) - r_{b1} (i_{12} + \cos) \cos \beta_{b1} + \\ & a \sin \sin \beta_{b1} \cdot \\ & (p_1 \theta_1 \sin \cos \beta_{b1} - r_{b1} \mu_1 \sin \Sigma \sin \beta_{b1}) \cdot \\ & \sin(\mu_1 + \theta_1 + \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

将式(4)、(5)联解即得径向剃齿刀的齿面方程。

### 3 径向剃齿刀与普通剃齿刀的齿形、齿向曲线

齿形曲线是指剃齿刀齿面与端截面(垂直于刀具轴线的任一平面)的交线。在式(2)、(4)中分

面的空间位置可以说没有变化。这种运动对两齿轮的啮合不发生影响。此时,设螺旋参数为  $p_2$ ,则共轭运动参数成为:剃刀沿其轴线的移动速度  $v_{02}$  (取  $z_2$  正方向为正)及角速度  $\omega + v_{02}/p_2$ ,被剃齿轮的角速度大小  $\omega_1 = i_{12} \omega$ 。坐标系如图 1 示,  $l_2$  表示在齿轮转过  $\varphi$  角时,剃齿刀沿轴线移动的距离 ( $l_2 = \overline{o_2 o_2}$ ), (取  $z_2$  正方向为正)。

将式(2-1)代入图 1 的坐标变换  $\sigma_1 \sigma_2$  式得:

式(2)、(3)联解,可以求出剃齿刀的齿面  $\xi(2)$ 。

在径向剃齿中,工件只沿工件和刀具轴线的公垂线方向移动,这时为了剃出整个齿面,剃齿刀和工件齿面必须保持线接触。而单自由度啮合传动一般是线接触的。所谓单自由度啮合是指两齿轮只作单纯的转动,而不沿轴线移动,这时只有一个独立运动参数( $\omega$  或  $\omega$ ,  $i_{12} = \omega / \omega$ )。

将式(1)代入图 2 的坐标变换  $\sigma_1 \sigma_2$ , 得:

别令  $z_2 = k$ ,  $k$  为常数, (其值表示端截面的位置), 并联解各自的啮合方程式, 可求得径向剃齿刀与普通剃齿刀的齿形曲线。

剃齿刀齿面与节圆柱的交线即为齿向曲线<sup>[1]</sup>。设刀具节圆柱面方程为:

$$x_2^2 + y_2^2 = r_2^2 \quad (6)$$

联解各自的坐标变换式和啮合方程式即可求得径向剃齿刀与普通剃齿刀的齿向曲线。

### 4 计算实例及结果分析

为便于对比,在径向剃齿与普通剃齿法中均采用向相同的设计参数如表 1 示:

**Table 1 Parameters of gear shaved and shaving cutter**

Symbol	Gear Shaved					Shaving Cutter				
	$m_n$	$z z_1$	$a_n$	$\beta_1$	$\xi_1$	$B_1$	$z z_2$	$\beta_2$	$\xi_2$	$B_2$
Value	3.75	39	20°	- 24.032778°	- 0.2933	25	56	18.5°	- 0.5196	30.5

表中  $m_n$ —法向模数 (normal module),  $a_n$ —法向压力角 (normal pressure angle),  $z z_1$ —被剃齿轮齿数 (number of teeth of gear shaved),  $\beta_1$ —被剃齿轮螺旋角 (helix angle of gear shaved), 负号表示左旋, 正号表示右旋,  $\xi_1$ —被剃齿轮的变位系数 (modification coefficient of gear),  $B_1$ —被剃齿轮齿宽 (facewidth of gear),  $z z_2$ —剃齿刀齿数 (number of teeth of shaving cutter),  $\beta_2$ —径向剃齿刀螺旋角 (helix angle of shaving cutter),  $\xi_2$ —剃齿刀变位系数 (modification coefficient of shaving cutter),  $B_2$ —剃齿刀齿宽 (cutter width)。

分别计算径向剃齿刀与普通剃齿刀在  $k = 0$ ; 曲线的计算结果略。

$k = \pm 5\text{mm}$  处的齿形曲线, 见表 2 和 3。各自齿向

**Table 2 Profile of plunge shaving cutter**

Position of section	$\theta_1$ (Radian)	$\mu_1$ (Radian)	$\varphi$ (Radian)	$x_2$ (mm)	$y_2$ (mm)	$x_1$ (mm)	$y_1$ (mm)	$z_1$ (mm)
5.000	- 0.040732	0.0	0.370540	- 119.424483	- 6.003805	74.315414	- 3.028725	7.313674
5.000	- 0.033180	0.20	0.160545	- 112.615024	- 2.228566	75.814611	- 2.318791	5.957587
5.000	- 0.025616	0.40	- 0.049443	- 107.461699	- 0.293971	80.105094	- 0.490423	4.599416
5.000	- 0.022336	0.486618	- 0.140384	- 105.835956	0.119244	82.710437	0.942685	4.010570
0.000	- 0.012855	0.00	0.345226	- 119.501819	- 4.198368	74.370960	- 0.956127	2.308253
0.000	- 0.005309	0.20	0.135217	- 112.635299	- 0.526483	75.849786	- 0.205125	0.953215
0.000	0.000	0.340504	- 0.012314	- 108.796191	0.933027	78.564693	0.967482	- 0.00000
0.000	0.005527	0.486618	- 0.165731	- 105.821910	1.717902	82.652070	3.246590	- 0.992359
- 5.00	0.015021	0.00	0.319931	- 119.553758	- 2.392668	74.368715	1.117166	- 2.697055
- 5.00	0.022562	0.20	0.109910	- 112.631372	1.175476	75.826045	1.908645	- 4.051026
- 5.00	0.030114	0.40	- 0.100104	- 107.421605	2.952865	80.008046	3.972296	- 5.407151
- 5.00	0.033389	0.486618	- 0.191058	- 105.784550	3.316384	82.529545	5.547902	- 5.995132

**Table 3 Profile of conventional shaving cutter**

Position of section	$\theta_1$ (Radian)	$\mu_1$ (Radian)	$\varphi$ (Radian)	$x_2$ (mm)	$y_2$ (mm)	$x_1$ (mm)	$y_1$ (mm)	$z_1$ (mm)
5.0	- 0.058427	0.000000	0.386617	- 119.425290	- 6.004421	74.250192	- 4.343138	10.490747
5.0	- 0.024109	0.200000	0.152300	- 112.614683	- 2.228432	75.832525	- 1.630995	4.328862
5.0	0.000000	0.340504	- 0.012314	- 108.797869	- 0.710899	78.564693	0.967482	- 0.00000
5.0	0.010209	0.400000	- 0.082018	- 107.461265	- 0.294167	80.071261	2.379006	- 1.833022
5.0	0.025071	0.486618	- 0.183499	- 105.836168	0.118647	82.572835	4.861272	- 4.501676
0.0	- 0.058427	0.000000	0.386617	- 119.502379	- 4.199318	74.250192	- 4.343138	10.490747
0.0	- 0.024109	0.200000	0.152300	- 112.635498	- 0.526663	75.832525	- 1.630995	4.328862
0.0	- 0.000000	0.340504	- 0.012314	- 108.796191	0.933027	78.564693	0.967482	0.000000
0.0	0.010209	0.400000	- 0.082018	- 107.453443	1.329517	80.071261	2.379006	- 1.833022
0.0	0.025071	0.486618	- 0.183499	- 105.822294	1.717730	82.572835	4.861272	- 4.501676
- 5.0	- 0.058427	0.000000	0.386617	- 119.552186	- 2.393257	74.250192	- 4.343138	10.490747
- 5.0	- 0.024109	0.200000	0.152300	- 112.630598	1.175226	75.832525	- 1.630995	4.328862
- 5.00	0.000000	0.340504	- 0.012314	- 108.769675	2.576741	78.564693	0.967482	- 0.00000
- 5.0	0.010209	0.400000	- 0.082018	- 107.421089	2.952898	80.071261	2.379006	- 1.833022
- 5.0	0.025071	0.486618	- 0.183499	- 105.784261	3.316421	82.572835	4.861272	- 4.501676

表 1 中同一端截面  $k$  所对应的所有点  $(x_1, y_1, z_1)$  表示被剃齿轮齿面上的一条剃痕, 所有的剃痕便构成了工件的全齿面, 如图 3 示。从图可知: 径向剃齿刀各端面对应到被剃齿轮齿面上的剃痕是一条条倾斜的空间曲线。根据径向剃齿刀的端截面位置  $k$  与被剃齿轮齿面上剃痕的对应关系, 可以进行径向剃齿刀的最小理论宽度计算<sup>[2]</sup>。同时可以看出径向剃齿过程是一个线接触的过程, 因为相同的  $\varphi$  值可以对应多个被剃齿轮齿面上的点, 从而也在理论上说明了径向剃齿不需要轴向移动就可以加工出工件齿轮的全齿面。实际上为了形成切削刃和便于排屑, 径向剃齿刀齿面上必须开有一些凹槽, 这些凹槽在剃齿过程中就在工件齿面上形成一条条的剃痕, 相邻剃痕的距离与槽宽有关, 直接影响工件齿面的表面粗糙度, 因此根据剃痕的排列顺序可以进行径向剃齿刀切削刃错位排列方法的设计与分析<sup>[3]</sup>。

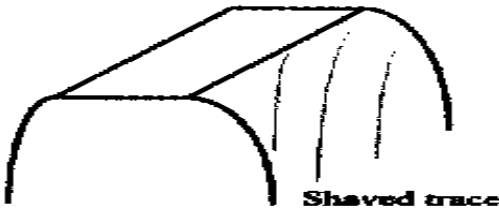


Fig. 3 Shaved trace of plunge shaving

而普通剃齿刀不同端截面上的齿形曲线对应在被加工齿轮齿面上的剃削痕迹都是一条相同的曲线, 如图 4 示。这也证明了普通剃齿法中被剃齿轮和剃齿刀是作点接触, 留在工件齿面上的剃痕可能不能覆盖整个被剃齿面, 要剃出工件全齿面必须附加轴向移动或斜向的运动, 强行把剃痕分

布到整个齿面, 因而切屑一般呈不均匀的碎状, 而不象径向剃齿时切屑为均匀细长状。

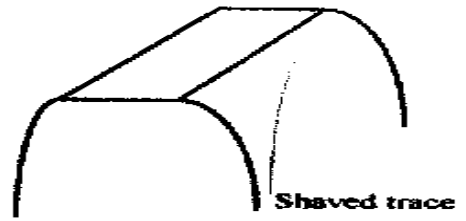


Fig. 4 Shaved trace of conventional shaving

根据计算可得普通剃齿刀所有的齿向曲线上的点都对应在被剃齿轮齿面上的一个点  $(x_1, y_1, z_1)$ , 即  $x_1 = 78.564693, y_1 = 0.967482, z_1 = 0.0$  该点正好是被剃齿轮的中截面与节圆的交点, 即  $z_1 = 0.0, x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$ , 其中  $r_1$  表示被剃齿轮的节圆半径。

## 5 结 论

在设计参数完全一致的情况下, 径向剃齿刀与普通剃齿刀齿面是非常接近的, 因此径向剃齿刀可以通过对普通剃齿刀齿面进行修形来加工。而且被剃齿轮齿面上的点:  $(x_1, y_1, z_1) = (78.564693, 0.967482, 0.0)$  对应到径向剃齿刀和普通剃齿刀上的点几乎是完全一致的, 即  $(x_2, y_2, z_2) = (-108.796191, 0.933027, 0.0)$  点。这说明径向剃齿刀与普通剃齿刀在中截面 ( $k=0$ ) 上节圆处重合。因此径向剃齿刀在该点可以不修形, 该点也是在普通剃齿刀磨床上通过对普通剃齿刀修形来加工径向剃齿刀时的比较基准。

## 参考文献:

- [1] 刘俐平, 李华敏. 径向剃齿刀齿形分析[J]. 齿轮, 1987, 11(1): 1~5.
- [2] 刘琼, 宾鸿赞. 径向剃齿刀最小宽度的求解[J]. 华中理工大学学报, 1998, 26(11): 78~80.
- [3] 刘琼, 宾鸿赞. 径向剃齿刀切削刃错位方式的研究[J]. 工具技术, 1997, 31(3): 15~17.

## Theory and analysis of tooth flank modeling with shaving cutter

LIU Qiong, BIN Hong-zan

*(School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)*

**Abstract:** The tooth flank equations of plunge shaving cutter and conventional shaving cutter are deduced using the engagement principle for single-freedom and two-freedom respectively. The difference between the plunge shaving and the conventional shaving is pointed out from the meshing points of view. By analyzing and comparing the results, several conclusions are yielded and they are taken as the criteria for designing and grinding a plunge shaving cutter.

**Key words:** plunge shaving; plunge shaving cutter; tooth flank modeling

作者简介: 刘琼(1965-),女,四川重庆市人,博士,华中理工大学机械科学与工程学院。