

# 圆形域干涉图中的相位解包裹

李国栋<sup>1</sup>, 韦春龙<sup>2</sup>, 于瀛洁<sup>1</sup>, 程维明<sup>1</sup>, 陈明仪<sup>1</sup>

(1. 上海大学嘉定校区精密机械工程系, 上海 201800;

2. 上海大学嘉定校区通信工程系, 上海 201800)

**摘要:** 相位解包裹问题是许多干涉术中存在的基本问题。运用 DCT 方法的解包裹算法是十分有效、健壮的处理, 然而仅适用于方形域条纹图处理。本文引入加权迭代方法将其有效地运用于常见的圆形域干涉图的处理。模拟结果表明, 加权迭代法的计算精度可达  $10^{-7}$  rad, 相对于普通的 DCT 解包裹算法有非常大的提高。我们在自行研制的 DOP-2000 型数字光学轮廓仪上, 运用相移干涉术对一多刻线样板进行了测量, 实验结果进一步表明, 本文的加权迭代法是一种非常有效和实用的方法。

**关键词:** 相位解包裹; 加权迭代; 干涉术

中图分类号: O438 文献标识码: A

## 1 引言

众所周知, 相移干涉术、傅氏变换轮廓术、数字散斑和全息干涉术等<sup>[1]</sup> 都普遍存在一个问题, 即所求相位包裹 (phase-wrapped) 于  $[-\pi, \pi]$  之间, 必须进行解包裹 (phase-unwrapping) 方能恢复所求正确相位分布。近年来对这一问题的研究正不断深入。大量的基于各自问题的算法层出不穷。然而, 其中有两种基于最小二乘意义下的算法颇有普遍实用价值, 一是运用塞可罗夫正则化理论的算法<sup>[2]</sup>; 二是运用离散余弦变换 (DCT) 的算法<sup>[3]</sup>。后者因其简洁明快, 笔者所在研究小组曾进行了这方面的研究报告<sup>[4]</sup>。由于常见的离散余弦变换是基于  $M \times N$  的方形域的, 因此, 在圆形域的干涉图处理中是不适用的。本文在离散余弦变换的基础上, 运用加权迭代方法, 对圆形域干涉图进行了有效的相位解包裹, 给出了数值模拟结果及实验验证。

## 2 原理

### 2.1 普通的运用 DCT 的解包裹算法<sup>[3]</sup>

由相移干涉术等易于求得被测物的包裹相

位, 设为  $\Psi_{i,j}$ ,  $\Phi_j$  为  $M \times N$  方形离散点上的解包裹相位, 则有

$$\Psi_{i,j} = \Phi_j + 2\pi k, \quad k \text{ 为整数}$$

$$-\pi \leq \Psi_{i,j} - \Phi_j \leq \pi, \quad i = 0, \dots, M-1; \\ j = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

定义包裹算子  $W_r$ , 可得

$$W_r\{\Phi_{i,j}\} = \Psi_{i,j} \quad (2)$$

定义:

$$\Delta_{i,j}^x = W_r\{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}\}$$

$$i = 0, \dots, M-2; j = 0, \dots, N-1 \\ \Delta_{i,j}^x = 0, \text{ 其他} \quad (3)$$

$$\Delta_{i,j}^y = W_r\{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}\}$$

$$i = 0, \dots, M-1; j = 0, \dots, N-2 \\ \Delta_{i,j}^y = 0, \text{ 其他} \quad (4)$$

其中, 上标  $x$  和  $y$  分别指  $i$  和  $j$  相应的差。作

$$S = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^x)^2 + \\ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^y)^2 \quad (5)$$

求解  $S$  最小二乘意义下的方程组, 即可获得相位解包裹的解  $\Phi_{i,j}$ 。

上述最小二乘方程组的法方程为

$$\Phi_{+1,j} + \Phi_{-1,j} + \Phi_{j+1} + \Phi_{j-1} - 4\Phi_{j,j} = \Delta_{i,j}^x - \Delta_{-1,j}^x + \Delta_{j,j}^y - \Delta_{j,-1}^y \quad (6)$$

对上式作简单恒等变换,得

$$(\Phi_{+1,j} - 2\Phi_{j,j} + \Phi_{-1,j}) + (\Phi_{j+1} - 2\Phi_{j,j} + \Phi_{j-1}) = \rho_{i,j} \quad (7)$$

其中

$$\rho_{i,j} = (\Delta_{i,j}^x - \Delta_{-1,j}^x) + (\Delta_{j,j}^y - \Delta_{j,-1}^y) \quad (8)$$

由

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y) = \rho(x, y) \quad (9)$$

可见式(7)实际上是  $M \times N$  方形网格上的离散 Poisson 方程,因为式(7)对所有方形网格点  $i = 0, \dots, M-1; j = 0, \dots, N-1$  都是有效的,并且被用于计算  $\rho_{i,j}$  的相位差仅在网格区域内是非零的。因此,可以直接得出离散 Poisson 方程的 Neumann 边界条件

$$\Delta_{-1,j}^x = 0, \Delta_{M-1,j}^x = 0, j = 0, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$\Delta_{0,-1}^y = 0, \Delta_{0,N-1}^y = 0, i = 0, \dots, M-1 \quad (11)$$

引入正反离散余弦变换(DCT)可得

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_{r1}(m) W_{r2}(n) \hat{\Phi}_{m,n} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right] \quad (12)$$

将式(12)代入式(7),并在式(7)右边作类似的展开,化简后,即得 DCT 域的精确解:

$$\hat{\Phi}_{m,n} = \frac{\hat{\rho}_{m,n}}{2\left[\cos\frac{\pi m}{M} + \cos\frac{\pi n}{N} - 2\right]} \quad (13)$$

通过式(12)的反 DCT 变换即可得相位解包裹的  $\Phi_{i,j}$ 。式(12)的 Neumann 边界条件简写为:

$$\begin{aligned} \Phi_{0,j} - \Phi_{-1,j} = 0, \quad \Phi_{M,j} - \Phi_{M-1,j} = 0, \quad j = 0, \dots, N-1 \\ \Phi_{i,0} - \Phi_{i,-1} = 0, \quad \Phi_{i,N} - \Phi_{i,N-1} = 0, \quad i = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (14)$$

## 2.2 加权迭代的运用 DCT 的解包裹算法

上面 2.1 实际上给出了在最小二乘意义下运用余弦变换解超定线性方程组的方法,

$$Ax = b \quad (15)$$

法方程组为

$$A^T Ax = A^T b \quad (16)$$

其中  $x$  是一个  $M \times N$  的相位值向量,  $b$  是包含包裹相位差的长度为  $N(M-1) + M(N-1)$  的向量,  $T$  为转置矩阵。式(16)可重写为

$$P\Phi = \rho \quad (17)$$

其中,  $P = A^T A$  为对向量  $\Phi$  作离散拉普拉斯变换的矩阵,  $\rho = A^T b$  为包含对包裹相位差作离散拉普拉斯变换的向量。通过 2.1 节可知如何求解式(17)。若条纹图中存在一些无相位信息区域(如圆孔径外部),则直接解式(17)将导致误差,然而可以通过加权予以分离出来,以使得运用 DCT 的相位解包裹结果方法可行且更为准确。这样相位去包裹问题归结为求解加权的最小二乘意义下的方程组:

$$WAx = Wb \quad (18)$$

法方程组为

$$A^T W^T W A x = A^T W^T W b \quad (19)$$

其中  $W$  为权重矩阵。

令  $Q = A^T W^T W A$ ,  $\bar{b} = W^T W b$  代入式(19),得

$$Qx = A^T \bar{b} \quad (20)$$

再将  $C = A^T \bar{b}$  代入式(20),得

$$Q\Phi = C \quad (21)$$

由此可见,  $\bar{b}$  为包含权重相位差的简单向量,  $C$  只不过为修正的权重化的包裹相位差的拉普拉斯算子。式(21)完全类似于式(17)。因此式(21)实为加权的最小二乘意义下相位解包裹的方程组。

运用离散余弦变换直接精确解式(21)是不可能的。但是运用下面的迭代却能够解得精确解。

分解矩阵  $Q$  成为

$$Q = P + D \quad (22)$$

将式(22)代入式(21),得

$$(P + D)\Phi = C \quad (23)$$

或

$$P\Phi = C - D\Phi \quad (24)$$

运用迭代方法解式(24),有

$$P\Phi_{k+1} = C - D\Phi_k \quad (25)$$

其中,  $k$  为迭代次数。

回顾

$$D\Phi = (Q - P)\Phi \quad (26)$$

其中  $Q = A^T W^T W A$  为修正的对权重相位差的离散拉普拉斯算子,  $P = A^T A$  为对非权重相位差的普通离散拉普拉斯算子。因此,  $D$  只不过是对  $\Phi$  的矩阵差算子。

式(25)是迭代方法的基础。相应算法归结如下:

- (1) 由普通权重和包裹相位差计算修正的离散拉普拉斯算子,进而计算向量  $C$ ,并存储之。
- (2) 定义最大迭代次数  $K_{\max}$ 。
- (3) 设迭代计数器,  $k = 0$  和  $\Phi = 0$  (或某一猜测初值)。

- (4) 计算向量  $P_k = C - D\Phi_k$ 。
- (5) 运用 2.1 节解  $P\Phi_{k+1} = \rho_k$ , 得  $\Phi_{k+1}$ 。
- (6) 若  $k < k_{max}$ , 继续, 否则停机, 设定最后解为  $\Phi_{k+1}$ 。
- (7) 更新迭代计数,  $k = k + 1$ 。
- (8) 转(4)。

### 3 数值模拟及实验验证

对方形域而言, 运用 DCT 的解包裹算法是精确的, 而对圆形域而言, 当运用 DCT 的解包裹算法时, 其外接长方形中圆域外值将置零或某个常数, 因此, 在其结果将引入误差。图 1 是给出的圆形理想斜平面, 图 2 是其包裹相位分布, 图 3 是运用 DCT 的解包裹后的相位分布, 其边缘误差很大, 高达 4.03rad。图 4 是运用引入加权迭代后得解包裹结果。与图 1 比较, 其误差为截断误差量级 ( $10^{-7}$  rad)。由此可见该方法的有效性。

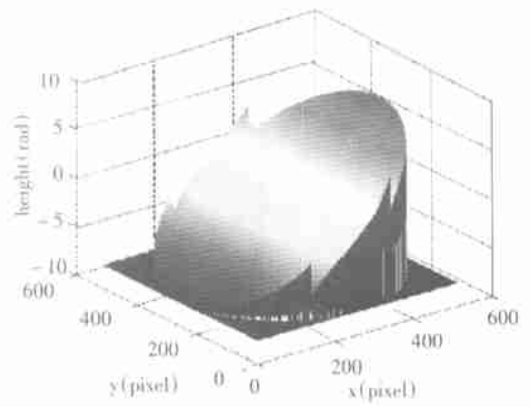


Fig. 3 Unwrapped phase using conventional DCT

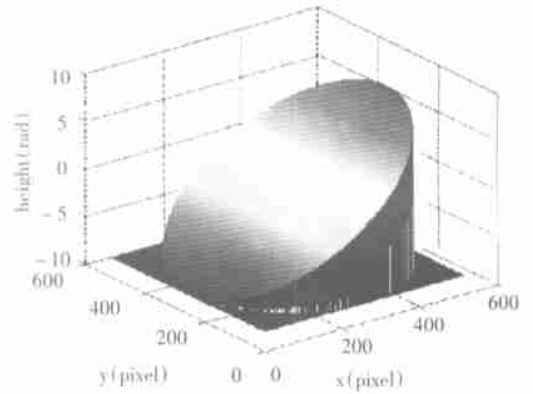


Fig. 4 Unwrapped phase using weighted and iterative DCT

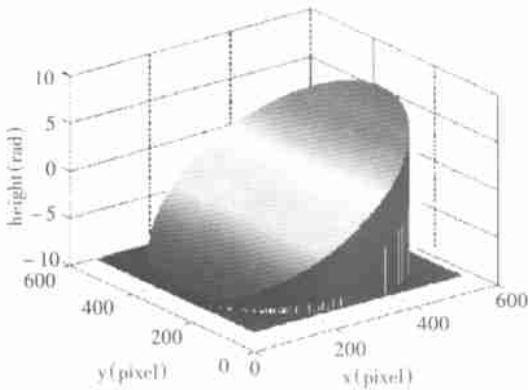


Fig. 1 Simulated ideal phase

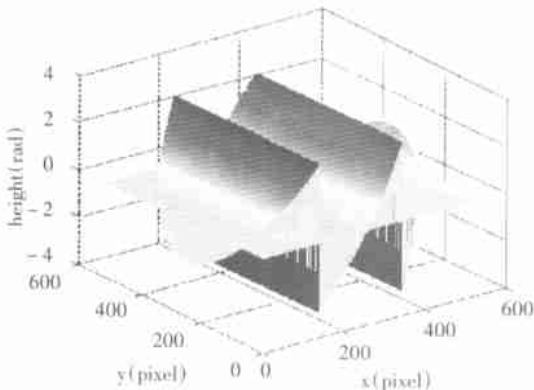


Fig. 2 Wrapped phase

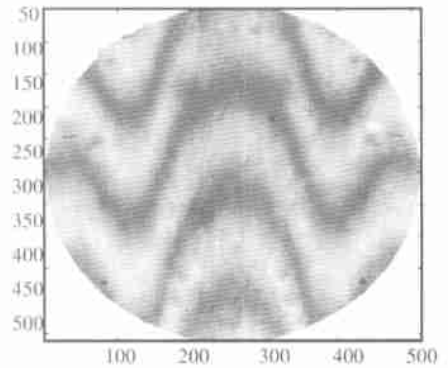


Fig. 5 An interferogram of the multi-lines sample

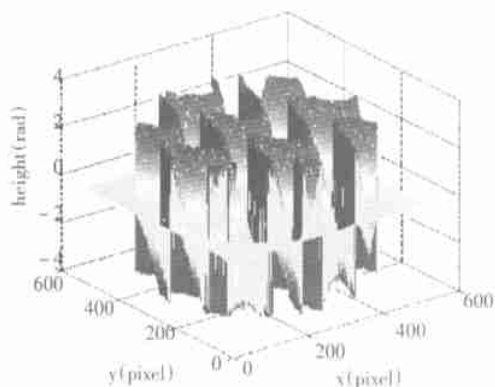


Fig. 6 Wrapped phase

本文进一步进行了实验验证。首先,在我们自行研制的 DOP-2000 型数字光学轮廓仪上<sup>[5-6]</sup>,运用相移干涉术求得一多刻线样板得包裹相位。图 5 是其干涉图。图 6 是相应的包裹相位图。图 7 是运用普通 DCT 的解包裹相位图,其边缘误差尤为明显。图 8 为运用了引入加权迭代后的解包裹结果,边缘误差消失。图 9 为图 7 和图 8 之差值。以上充分证明本文方法的有效及健壮性。

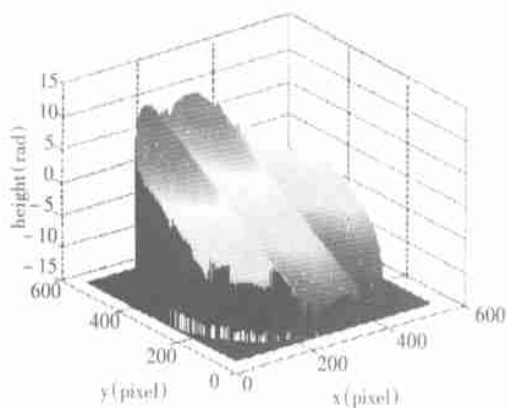


Fig. 7 Unwrapped phase using conventional DCT

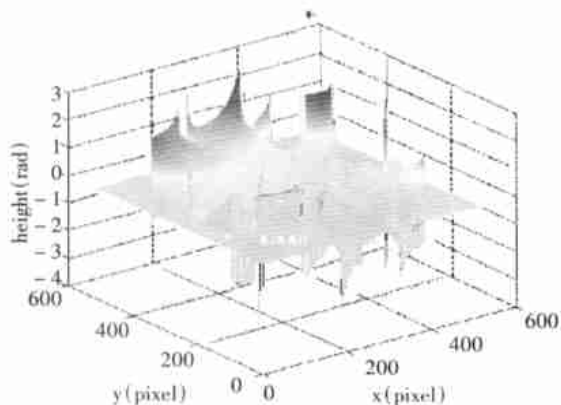


Fig. 9 Difference between Fig. 7 and Fig. 8

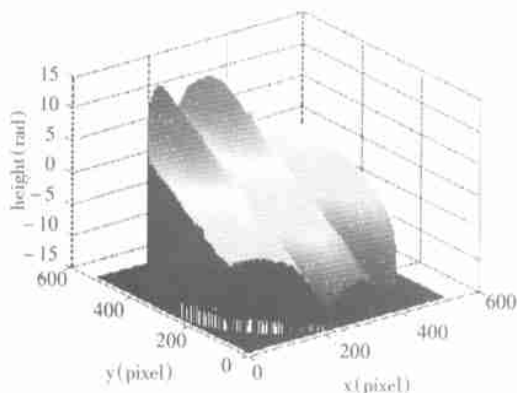


Fig. 8 Unwrapped phase using weighted and iterative DCT

## 4 结 论

本文在具有最小二乘意义的 DCT 解包裹算法基础上,引入加权迭代方法对圆形域的相位包裹图进行了相位解包裹处理。模拟结果表明,加权迭代法的计算精度可达  $10^{-7}$  rad, 相对于普通的 DCT 解包裹算法有非常大的提高。实验结果进一步表明,本文的加权迭代法是一种非常有效和健壮的方法。该方法不仅适用于一般的没有间断处的干涉图的处理,而且对于有非连续(如有边缘截取,烂斑等)的表面测量具有较好的实用价值。

## 参考文献:

- [1] Robinson D W. Phase unwrapping methods[M]. Robinson D W, Reid G T. Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement Techniques[M]. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1993. 194– 229.
- [2] Marroquin J L, Rivera M. Quadratic regularization functionals for phase unwrapping[J]. J. Opt. Soc. Am. (A), 1995, 12(11): 2393– 2400.
- [3] Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods[J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1994, 11(1): 107– 117.
- [4] 曹原,等. 数字光学轮廓仪中相位去包裹算法研究[J]. 光学精密工程, 1999, 7(5): 100– 105.
- [5] Wei Chunlong, Chen Mingyi, et al. Digital optical profiler with automatic reference phase calibration[J]. 1998, 3558: 470– 479.
- [6] 韦春龙. 相移干涉术和数字光学轮廓仪研究[D]. 上海: 上海光机所, 1998.

## Phase-unwrapping for interferograms with circle field

LI Guo-dong<sup>1</sup>, WEI Chun-long<sup>2</sup>, YU Ying-jie<sup>1</sup>, CHENG Wei-ming<sup>1</sup>, CHEN Ming-yi<sup>1</sup>

(1. Dept. of Precision Mechanical Engineering,

Shanghai University(Jiading), Shanghai 201800, China;

2. Dept. of Communication Engineering, Shanghai University(Jiading), Shanghai 201800, China)

**Abstract:** Phase-unwrapping is a basic problem in many interferometry. The phase unwrapping algorithm using DCT method is one of specially effective and robust ones. However, it is only suitable for rectangle fields. In this paper, it is effectively used for circle fields by introducing weighted and iterative methods. The computer simulation shows that the accuracy can reach to  $10^{-7}$  rad and important improvement is made. A sample of multiline is measured using phase-stepping interferometry in DOP-2000 digital optical profiler developed by us. Further experimental results indicate that the method is very effective and practical.

**Key words:** phase-unwrapping; weighted iteration; interferometry

作者简介: 李国栋(1976-), 男, 安徽蒙城人, 上海大学精密机械工程系硕士研究生, 研究领域: 微机械及光学检测。