

# Mallat 算法在图像处理中的约束条件

解成俊<sup>1,2</sup>, 宋建中<sup>1</sup>, 顾海军<sup>1</sup>

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130021;

2. 北华大学师范学院, 吉林 吉林 132011)

**摘要:** 指出了应用 Mallat 算法进行图像处理时容易出现的一些容易混淆和错误的问题, 给出了正确使用 Mallat 算法的约束条件, 用 Haar 和 Daubechies 小波研究了基于子带编码的图像压缩问题, 给出了三种小波压缩编码方案并进行了基于约束条件的仿真实验, 仿真结论可以启发我们构建有效的图像压缩编码方案和正确地应用 Mallat 算法.

**关键词:** Mallat 算法; 约束条件; 小波变换; 图像压缩

**中图分类号:** TN911.74 **文献标识码:** A

## 1 引言

小波分析是 Fourier 分析的重大突破, 由于小波变换具有良好的时域和频域的局域化性质, 是一种新的极其有效的时—频分析手段, 尤其在图像处理中的应用更为引人注目, 例如, 基于并行小波变换的应用研究<sup>[1]</sup>, 图像压缩<sup>[2]</sup>, 图像增强<sup>[3]</sup>, 图像分割<sup>[4]</sup>, 边缘检测<sup>[5]</sup>, 图像隐含、加扰、防伪<sup>[6]</sup>, 噪声消除<sup>[7]</sup>, 尺度不变性描述<sup>[8]</sup>, 光学子波变换用于图像处理<sup>[9]</sup>, 国内也出版了许多关于小波分析的书<sup>[10]</sup>, 由于编著者大多都是从数学概念的角度出发阐述小波分析方法, 难免忽视了实际工程应用的一些细节问题, 或有些不妥之处, (见下面讨论)。这样对没有很深小波理论基础的工程技术人员而言, 有时可能导致错误的结论。尤其在图像压缩的应用中, 后果将十分严重。小波分析中的 Mallat 算法相当于经典 Fourier 分析中的 FFT, 其重要性不言自明, 本文针对在图像处理中应用 Mallat 算法的一些容易出现混淆和错误的问题进行了研究, 并用 Haar, Daubechies 小波对图像压缩进行了基于约束条件的仿真研究结果。

## 2 关于 Mallat 算法的几点注记

### 2.1 小波正交共轭滤波器的引入

尺度函数中  $\Phi(x)$  是由 Riesz  $\{g(x-k), k$

$z\}$  来构造的, 同时也构造了关于尺度函数的低通滤波器  $\{h_k\}(H(\omega))$ , 小波函数  $\Psi(x)$  是由  $\Phi(x)$  构造的, 同时, 也构造了关于小波函数的高通滤波器  $\{g_k\}(G(\omega))$ ,  $\Phi(x), \Psi(x)$  都是标准正交基 (ONB), 可以证明:

$$\left| \hat{\Phi}(\omega + 2\pi k) \right|^2 = 1 \quad (1)$$

$$\left| H(\omega) \right|^2 + \left| H(\omega + \pi) \right|^2 = 1 \quad (2)$$

$$\left| H(0) \right| = 1 \quad (3)$$

$$G(\omega) \overline{H(\omega)} + G(\omega + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} = 0 \quad (4)$$

小波正交共轭滤波器的设计是由以上约束条件来完成的。

### 2.2 两尺度关系同 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的关系

通常两尺度关系就是指空间  $V_j$  和  $V_{j+1}$  以及  $W_j$  和  $V_{j+1}$  之间的映射关系, 并且  $V_{j+1} = W_j \circ V_j$ , 在  $V_{-1}$  空间尺度函数 ONB 可以取不同的形式, 只要满足标准正交就可以, 通过两尺度关系和(4)式直接约束了  $\{h_k\}$  和  $\{g_k\}$  的取值。在离散二进小波分析中, 可以取  $\frac{1}{2}\Phi(\frac{x}{2}), \Phi(\frac{x}{2}), -\frac{1}{2}\Phi(\frac{x}{2})$  不同的形式,  $W_{-1}$  空间的小波函数则取相应的  $\frac{1}{2}\Psi(\frac{x}{2}), \Psi(\frac{x}{2}), -\frac{1}{2}\Psi(\frac{x}{2})$ , 这样就出现三种不同的两尺度关系

$$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(x - k) \quad (5)$$

$$\Phi(2\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega) \Phi(\omega) = H(\omega) \Phi(\omega) \quad (6)$$

$$\Phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(x - k) \quad (7)$$

$$\Phi(2\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} h_k \exp(-ik\omega) \Phi(\omega) = H(\omega) \Phi(\omega) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(x - k) \quad (9)$$

$$\Phi(2\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} h_k \exp(-ik\omega) \Phi(\omega) = H(\omega) \Phi(\omega) \quad (10)$$

由(5)式, (7)式, (9)式可以得到  $\{h_k\}$  的约束条件分别为:  $h_k = 1$ ;  $h_k = 2$ ;  $h_k = \frac{1}{2}$ ; 由约束条件知, 在参考文献中选择滤波器  $\{h_k\}$  时必须要看两尺度关系是取自(5)式- (10)式中的哪一个, 原因是 Mallat 算法的导出同两尺度关系的初始定义直接相关。

### 2.3 $\{h_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 之间的关系

仍然以  $V_{-1}, W_{-1}, V_0$  空间为例,  $\exists f(x) \in V_{-1}$ ; 则  $f(x)$  可用(5)式展开, 那么一定有  $\langle \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{2}\right), f(x) \rangle \geq 0$ ; 这样就得出(4)式, 然而  $G(\omega)$  的构造不是唯一的, 因为我们可以推导出:

$$\frac{G(\omega + \pi)}{H(\omega)} = \exp(-i\omega) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{2m+1} \exp(-i2m\omega) \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (11)$$

$$\frac{G(\omega + \pi)}{H(\omega)} = \exp(-i(\omega + \pi)) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{2m+1} \exp(-i2m\omega) \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (12)$$

令  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{2m+1} \exp(-i2m\omega) = 1$ , 则有

$$G(\omega) = \exp(-i\omega) \overline{H(\omega + \pi)} \quad (13)$$

或

$$G(\omega) = \exp(-i(\omega + \pi)) \overline{H(\omega + \pi)} \quad (14)$$

而相应的  $\{g_k\}$  表达式为:

$$g_k = (-1)^{1-k} \overline{h_{1-k}} \quad (15)$$

或

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}} \quad (16)$$

由于  $1-k$  和  $k-1$  的奇偶性相同, 所以(15)式又可以写成

$$g_k = (-1)^{k-1} \overline{h_{1-k}} \quad (17)$$

只有知道了  $H(\omega), G(\omega)$  的构造基础, 才能实现滤波器的最优选择。

### 2.4 由 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 构造的一般两尺度关系

考察  $V_{j+1} = V_j \circledast W_j$  中的  $V_{j+1}$  和  $V_j, W_j$  之间的映射关系; 可以写成

$$\Phi_{j,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{k,z} h_{p-2k} \Phi_{j+1,p}(x) \quad (18)$$

$$\Psi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{k,z} g_{p-2k} \Phi_{j+1,p}(x) \quad (19)$$

其中,  $\alpha = \frac{1}{2}$  对应(5)式,  $\alpha = 1/\sqrt{2}$  对应(7)式,  $\alpha = 1$  对应(9)式。

### 2.5 Mallat 算法

由(18), (19)式可以推出:

$$C_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{p,z} \overline{h_{p-2k}} C_{j+1,p} \quad (20)$$

$$D_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{p,z} \overline{g_{p-2k}} C_{j+1,p} \quad (21)$$

$$C_{j+1,k} = \alpha \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_{j,m} h_{k-2m} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} D_{j,n} g_{k-2n} \right) \quad (22)$$

其约束条件为:  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $h_k = 1$ , 两尺度关系对应(5)式;  $\alpha = 1/\sqrt{2}$ ,  $h_k = 2$  两尺度关系对应(7)式;  $\alpha = 1$ ,  $h_k = \frac{1}{2}$ , 两尺度关系对应(9)式, 其中  $\alpha = 1$ ,  $h_k = \frac{1}{2}$  的情形就是 Mallat 算法的基本形式, 另外两种为推广形式。根据一维形式可以得到二维形式的 Mallat 算法:

$$C_{j,k,l} = \beta \sum_{p,q} \overline{h_{p-2k}^{(1)} h_{q-2l}^{(2)}} C_{j+1,p,q} \quad (23)$$

$$D_{j,k,l} = \beta \sum_{p,q} \overline{h_{p-2k}^{(1)} g_{q-2l}^{(2)}} C_{j+1,p,q} \quad (24)$$

$$D_{j,k,l} = \beta \sum_{p,q} \overline{g_{p-2k}^{(1)} h_{q-2l}^{(2)}} C_{j+1,p,q} \quad (25)$$

$$D_{j,k,l} = \beta \sum_{p,q} \overline{g_{p-2k}^{(1)} g_{q-2l}^{(2)}} C_{j+1,p,q} \quad (26)$$

其约束条件为  $\beta = 2$ ,  $h_k = 1$  两尺度关系对应

(5)式;  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $h_k = 2$  两尺度关系对应(7)

式;  $\beta = 1$ ,  $h_k = \sqrt{2}$  两尺度关系对应(9)式, 注意与一维约束条件的区别。

### 3 用小波变换实现图像压缩的研究

在图像压缩中, 由于线性相位和小波的正交性对重建图像的质量都有影响, 所以常采用以双正交小波, 而不是单正交小波来实现图像压缩, 鉴于实现方法是一样的, 为了说明问题方便, 本文选用最简单的 Haar 小波来说明实现 Mallat 算法的约束条件, 并用 Haar 和 Daubechies 小波给出仿真结果。

#### 3.1 4 × 4 矩阵的分解和重构

取约束条件:  $\beta = 2$ ,  $h_k = 1$ ;

$$g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

取约束条件:  $\beta = 1$ ,  $h_k = 1, g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$ .

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可见, 由于没有考虑两尺度关系对滤波器的限制以及没有使用相应的 Mallat 算法, 所得的分解结果是不同的, 因此所得的图象压缩结果也是不同的, 在第二种情况下, 分解图象时, 每分解一次, 参与分解图像的像素值将被衰减  $2^j$  倍( $j$  为分解水平)。

#### 3.2 实际图像的分解和重构

##### 3.2.1 分解

本文选用 MATLAB 中 woman2.mat 作为测试图象(128 × 128), 分解子带标志如图 1: 分解数据见表 1 和表 2。

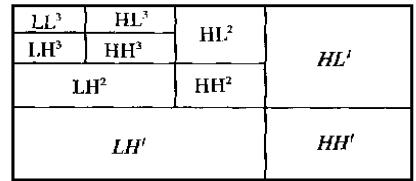


Fig. 1 Symbol of decompound subband

Table 1:  $\beta = 1$ ,  $h_k = 1; g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$ .

Sub-Band	LL <sup>3</sup>	LH <sup>3</sup>	HL <sup>3</sup>	HH <sup>3</sup>	LH <sup>2</sup>	HL <sup>2</sup>	HH <sup>2</sup>	LH <sup>1</sup>	HL <sup>1</sup>	HH <sup>1</sup>
$\bar{X}$	125.3169	0.9486	1.3989	0.0485	-0.1484	0.0381	0.0425	-0.0373	0.2570	0.0516
$\sigma^2$	$2.4834 \times 10^3$	124.6675	124.6675	36.7649	89.7711	153.2377	31.4737	73.6488	207.0935	77.1190

Table 2:  $\beta = 2$ ,  $h_k = 1; g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$ .

Sub-Band	LL <sup>3</sup>	LH <sup>3</sup>	HL <sup>3</sup>	HH <sup>3</sup>	LH <sup>2</sup>	HL <sup>2</sup>	HH <sup>2</sup>	LH <sup>1</sup>	HL <sup>1</sup>	HH <sup>1</sup>
$\bar{X}$	1005.3	7.5278	11.1997	0.3188	0.1628	-0.5408	0.1638	0.5148	-0.0746	0.1013
$\sigma^2$	$1.5899 \times 10^3$	$7.9781 \times 10^3$	1.0690	$2.3542 \times 10^3$	$2.4517 \times 10^3$	$1.4384 \times 10^3$	504.5263	828.3734	294.5952	308.7195

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{i=N-1} x_i; \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{i=N-1} (x_i - \bar{x})^2$$

通过表 1、表 2 的数据可以得出:

a. 用小波实现图像分解, 低频子带(LL<sup>3</sup>)保留了图象的主要信息, 边缘高频子带(LH<sup>j</sup>, HL<sup>j</sup>, HH<sup>j</sup>; j = 1, 2, 3)保存较少的信息并且(LH<sup>j</sup>, HL<sup>j</sup>; j = 1, 2, 3)比相应的对角子带(HH<sup>j</sup>; j = 1, 2, 3)保留的信息要多, 这符合人的视觉系统对不同方向上子带失真敏感程度的客观评价。

b. 高频子带的能量值均较小, 而且大部分像素点灰度值为 0 值, 这可由统计直方图看出(图

略)。

c. 表 1、表 2 数据说明了限制条件的重要性。

##### 3.2.2 重构

重构时采用不同的编码方案将得到不同的重构效果。本文采用三种不同的编码方案对图像进行重构, 以便进行对比研究。方案 1: 子带 LL<sup>3</sup> 的信息全部保留; LH<sup>3</sup>, HL<sup>3</sup> 的像素值取  $|f(x, y)| < 3$  时  $f(x, y) = 0$ ; HH<sup>3</sup> 的像素值取  $|f(x, y)| < 8$  时  $f(x, y) = 0$ ; LH<sup>2</sup>, HL<sup>2</sup> 的像素值取

$|f(x, y)| < 6$  时  $f(x, y) = 0$ ;  $HH^2$  的像素值取  $|f(x, y)| < 10$  时  $f(x, y) = 0$ ;  $LH^1, HL^1, HH^3$  的像素值全部作 0 处理。重构效果为: (取限制条件:  $\beta = 2, h_k = 1$ )

$\bar{X} = 125.5665, \sigma^2 = 3.1735 \times 10^3, D = 359.1420, PSNR = 22.5781, SNR = 9.4627$

(取限制条件:  $\beta = 1, h_k = 1$ )

$\bar{X} = 125.5665, \sigma^2 = 3.1392 \times 10^3, D = 393.4221, PSNR = 22.1881, SNR = 9.0196$

方案 2: 无第一层小波系数重构效果为: (取限制条件:  $\beta = 2, h_k = 1$ )

$\bar{X} = 125.5665, \sigma^2 = 3.1735 \times 10^3, D = 358.0177, PSNR = 22.5918, SNR = 9.4764$

方案 3: 无第一层和第二层小波系数重构效果为: (取限制条件:  $\beta = 2, h_k = 1$ )

$\bar{X} = 125.5665, \sigma^2 = 2.8991 \times 10^3, D = 632.$

6929,  $PSNR = 20.1189, SNR = 6.610$

PSNR、SNR 较小的主要原因是因为 haar 小波的滤波器长度最短, 具有对称性, 作图象压缩不需要作边界延拓, 可无失真恢复, 运算时间最少。缺点是保留信息能力相对较差, 因而重构时信噪比较低。所以通常是理论研究中使用的—种小波, 在实际的工程中, 要根据时间复杂性要求的限制而尽可能选择长度较大的小波滤波器。例如, 选用 Daubechies 小波(滤波器长度为 24)按方案 1 得到的重构效果为:

$\bar{X} = 124.8523, \sigma^2 = 3.2551 \times 10^3, D = 358.0359, PSNR = 25.7066, SNR = 9.586。$

效果明显好于 Haar 小波。(关于滤波器长度与重构效果的关系将另文研究)

### 3.2.3 仿真结果



(a) Original image (b) Three decompond (c) Three decompond

Fig.2 [(b)  $\beta = 1, h_k = 1$ ] [(c)  $\beta = 2, h_k = 1$ ]



(a) Reconstructed image (b) Reconstructed image

Fig.3 Reconstruction based on scheme 1: [(a):  $\beta = 1, h_k = 1$ ], [(b):  $\beta = 2, h_k = 1$ ]



(a) Reconstructed image (b) Reconstructed image (c) Reconstructed image

Fig.4 (a) Reconstruction based on scheme 3, (b) Reconstruction based on scheme 2, [ $\beta = 2, h_k = 1$ ], (c) Reconstruction based on scheme 1 by Daubechies wavelet (note: divide Fig. 4(c) all of figures by Haar wavelet)

## 4 结 论

本文讨论了文献中引用 Mallat 算法的一些

不妥之处以及容易引起读者混淆的关键问题。明确给出了 Mallat 算法三种表述的限制条件,并用 Haar 和 Daubechies 小波对图象压缩进行了基于约束条件的仿真研究,给出了有益的结果。

### 参考文献:

- [1] 李骏,胡家升. 并行多分辨率子波变换(WT)及其实现方法研究(I 理论部分)[J]. 光学 精密工程, 1995, 3(1): 35-39.
- [2] Shapiro Jerome M. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients[J]. IEEE Trans. On Signal Processing, Dec. 1993, 41(12): 3445- 3462.
- [3] 许雷,等. 一种基于小波相位滤波及视觉非线性的医学图像的自适应增强新方法[J]. 电子学报, 1999, 27(9): 121-123.
- [4] 张天序,彭雄. 基于视觉非线性的图象分割新方法[J]. 计算机学报, 1993, 16(4): 248- 256.
- [5] 王玉华. 多尺度 B 样条小波边缘检测算子[J]. 中国科学 A 辑, 1995, 25(4): 426- 437.
- [6] 姬光荣,王国宁,王宁. 基于小波变换的多尺度边缘检测[J]. 中国图形图像学报, 1997, 2(10): 717- 720.
- [7] 李忠源,任萍,黄丽,陈彤. 几种基于小波变换的图像处理技术[J]. 电子学报, 1999, 27(6): 138- 140.
- [8] 仇智华,艾德才. 基于子波分析的信号噪声分离方法研究[J]. 天津大学学报, 2000, 33(3): 262- 264.
- [9] 闫丽,等. 光学子波用于图像处理[J]. 光学 精密工程, 2000, 8(3): 225- 230.
- [10] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995. 507.
- [11] 高清维. 基于双正交小波变换的数字图像压缩编码[J]. 电视技术, 2000, (2): 3- 5.

## Restrained condition of Mallat algorithm in image processing

XIE Cheng-jun<sup>1,2</sup>, SONG Jian-zhong<sup>1</sup>, GU Hai-jun<sup>1</sup>

- (1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130021, China;
2. Beihua University Normal College, Jilin 132011, China )

**Abstract:** Some problems were pointed out, which are easy to be confused and make mistakes in image processing using Mallat algorithm, and the correct restrained conditions using Mallat algorithm were also given. Image compressions based on subband coding has been studied by Haar and Daubechies wavelets, and three kinds of schemes for wavelet compression coding scheme were presented in this paper. The simulation experiments based on the restrained conditions were carried out and the results of the experiments can be used to effective schemes for image compression coding, therefore the Mallat algorithm can be applied correctly.

**Key words:** Mallat algorithm; restrained condition; wavelets transform; image compressions

作者简介: 解成俊(1962-),男,吉林省汪清县人,获东北师大物理系学士和硕士学位,博士研究生,副教授,研究方向为计算机图像处理等,公开发表论文 40 余篇。