

文章编号 1004-924X(2001)01-0074-03

位置差分数字测速传递函数的推导

王建立, 陈娟, 陈涛, 王世杰

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130022)

摘要: 位置差分数字测速传递函数, 直接影响按连续系统设计法设计的速度回路校正环节的有效性。通过本文推导和仿真验证表明数字测速传递函数等效为一个微分和惯性环节的组合更为合理, 而不是文献[1]、[2]等所等效的纯延迟环节。文章给出了满足等效的工程条件。

关键词: 位置差分; 数字测速; 传递函数

中图分类号: V556.51 文献标识码: A

1 引言

在经纬仪等全数字跟踪伺服系统中, 速度反馈一般是通过绝对式轴角编码器经位置差分实现的, 即所说的位置差分数字测速。基于连续系统设计法的速度回路校正需要速度反馈的传递函数, 以设计合理的校正控制器。文献[1]、[2]等将位置差分数字测速传递函数等效为纯延迟环节, 其实是不合理的。通过本文推导和仿真验证表明数字测速传递函数等效为一个微分和惯性环节的组合更为合理, 同时给出了满足等效的工程条件。

2 位置差分数字测速传递函数推导

绝对式轴角编码器测得的是角位置量, 角位置量对时间求导, 即可得到角速度。即

$$v = \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

v —角速度, θ —轴角编码器获得的角位置信息。

在离散化时域, (1)式的差分方程形式为:

$$V(K) = \frac{\theta(K) - \theta(K-1)}{T_f} \quad (2)$$

K —采样时刻(取 1, 2, 3, …), T_f —采样时间间隔, $\theta(K)$ — K 时刻角位置量

连续系统的设计方法是建立在传递函数基础

之上的, 因此需要将(2)式差分方程的形式等效转换为连续系统传递函数的形式。

对差分方程(2)式进行 z 变换, 得

$$V(z) = \frac{\theta(z) - z^{-1}\theta(z)}{T_f} \quad (3)$$

系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{V(z)}{\theta(z)} = \frac{1}{T_f} (1 - z^{-1}) \quad (4)$$

2.1 由 Z 变换定义推导

由 Z 的定义 $z = e^{Ts}$, 得 $z^{-1} = e^{-Ts}$, T 为采样周期, 这里 $T = T_f$, 因此(4)式转换为连续系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{T_f} (1 - e^{-T_f s}) \quad (5)$$

由于式(5)中包含指数函数 $e^{-T_f s}$, 使系统成为非最小相位系统, 分析和设计都比较麻烦, 可将其进行工程简化^[3]将 $e^{-T_f s}$ 按泰勒级数展开, 得

$$e^{-T_f s} = \frac{1}{e^{T_f s}} = \frac{1}{1 + T_f s + \frac{1}{2!} T_f^2 s^2 + \frac{1}{3!} T_f^3 s^3 + \dots} \quad (6)$$

考虑到 T_f 很小(一般 0.005s), 忽略其高次项, 近似表示成

$$\frac{1}{1 + T_f s} \quad (7)$$

则(5)式可近似表示为

$$G(s) = \frac{1}{T_f} (1 - e^{-T_f s}) \cdot \frac{1}{T_f} \left(1 - \frac{1}{1 + T_f s}\right)$$

$$= \frac{s}{1 + T_f s} \quad (8)$$

能将(6)式近似成(7)式的条件是 $T_f s \ll 1$, 然而 s 本身是个复变量, 近似条件不明确. 按自动控制原理, 将 s 换成 $j\omega$, 便得到相应的幅相频率特性. 于是

$$e^{-T_f j\omega} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2} T_f^2 \omega^2 + \frac{1}{24} T_f^4 \omega^4 - \dots) + j(T_f \omega - \frac{1}{6} T_f^3 \omega^3 + \dots)}$$

(9)

(8)式近似成 $\frac{1}{1 + jT_f \omega}$ 的条件是

$$\begin{cases} \frac{1}{2} T_f^2 \omega^2 \ll 1 \\ \frac{1}{6} T_f^3 \omega^3 \ll T_f \omega \end{cases}$$

后者包含在前者之中. 因此, (7)式成立的条件是 $\frac{1}{2} T_f^2 \omega^2 \ll 1$. 从工程上看, 只要 $\frac{1}{2} T_f^2 \omega^2 \ll \frac{1}{10}$, 就认为 $\ll 1$ 了, 于是

$$\omega \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{T_f}} = \frac{1}{2 \cdot 24 T_f}$$

这意味着闭环控制系统的通带带宽 ω 小于 $\frac{1}{2 \cdot 24 T_f}$. 通常, 系统开环频率特性的截止频率一般略低于闭环频率特性的频带 ω , 作为近似条件, 粗略地取

$$\omega \approx \frac{1}{3 T_f}$$

这是 $e^{-T_f s}$ 近似成 $\frac{1}{1 + T_f s}$ 的工程近似条件. 一般 $T_f = 0.005s$, ω 取值范围可完全符合工程近似条件.

2.2 由双线性变换公式推导

利用双线性变换公式

$$s = \frac{2}{T_f} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (8)$$

可以将连续系统离散化. 同理, 由(8)可得,

$$z = \frac{2 + T_f s}{2 - T_f s} \quad (9)$$

将(9)代入(4)得

$$G(s) = \frac{2s}{2 + T_f s} = \frac{s}{1 + 0.5 T_f s} \quad (10)$$

比较(7)和(10), 均匀微分和惯性环节, 只是极点大小不同. 这是工程化时, 忽略次要项的不同所

致. 所以, 数字测速反馈的传递函数等效为一微分和惯性环节的组合, 而不是延迟环节. 我们可以通过仿真验证推导的正确性.

3 仿真验证

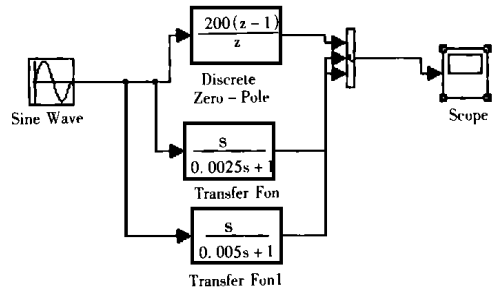


Fig 1 Emulation model for measuring speed digital mode

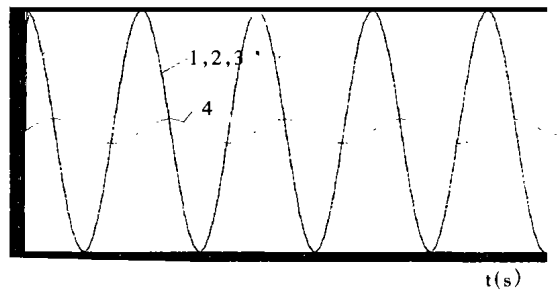


Fig 2 Emulation result while input is sin 10t

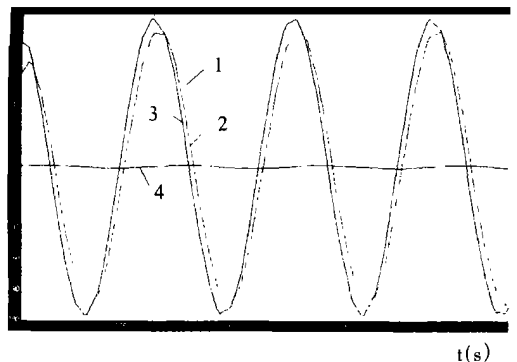


Fig 3 Emulation result while input is sin 100t

可以通过MATLAB建立数字测速反馈系统仿真模型, 对数字测速等效为微分和惯性环节的正确性进行验证. 图1是数字测速脉冲传递函数及等效为一微分和惯性环节的仿真模型, 输入为一正弦信号 $A \sin \omega t$, T_f 取 $0.005s$. 其中, $\frac{200(z-1)}{z}$ 是脉冲传递函数, $\frac{s}{0.0025s+1}$ 是由双线性变换推导的等效传递函数, $\frac{s}{0.005s+1}$ 是

由定义推导的等效传递函数。图 2 是输入正弦信号 $\sin 10t$ 时的仿真结果。图 3 是输入正弦信号 $\sin 100t$ 时的仿真结果。图中 1、2、3 曲线, 分别是公式 (4)、(7)、(10) 正弦输入信号时的输出曲线波形, 4 是输入正弦曲线波形。

比较图 2、图 3 中 1、2、3 输出曲线, 波形幅值、相位几乎完全一致, 说明推导的等效传递函数与实际相符合。与 4 输入曲线相比较, 输入信号频率较低时输出幅值是输入的 ω 倍, 随着输入信号频率的增加, 幅值的增加趋势减弱, 最后不再变化, 符合微分和惯性环节的幅频特性关系。相位上, 当 $\omega = 10 \text{ rad/s}$, 输出相位超前输入约 90° ; 随着输入信号频率的增大, 输出相位超前输入相位

的趋势逐渐减小, 符合微分和惯性环节的相频特性。因此, 将数字测速反馈环节等效为一个微分和惯性环节的组合是正确的。

4 结 论

本文推导并证明了位置差分数字测速的传递函数可以等效为一个微分和惯性环节的组合, 而不是一个纯延迟环节, 对于采用连续系统校正法设计更为合理有效的速度回路校正环节有很大作用。至于惯性环节的时间常数的确定, 由于采样周期一般都比较短, 采用 Z 变换定义或双线性变换推导的时间常数, 工程上区别不大, 可以任选。

参考文献:

- [1] 李岩 双轴扫描架计算机集中控制[D]. 长春: 长春光学精密机械与物理研究所, 1999.
- [2] 刘辉 全数字伺服控制系统[J]. 光学 精密工程, 1995, 5: 60- 64.
- [3] 陈伯时 电力拖动自动控制系统[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991: 27- 28.

Deduction of the transfer function of speed measuring in digital mode realized by position differential

WANG Jian-li, CHEN Juan, CHEN Tao, WANG Shi-jie

*(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022, China)*

Abstract: The transfer function of speed measurement realized by position differential in digital mode affects the controller's effects directly when design the controller in continuous system method. Through deduction and emulation verification, this paper shows that the transfer function of speed measurement realized by position differential in digital mode is equal to a combination of a differential part and an inertia part, and it is more reasonable than to a pure delay part in reference 2 and 3. And also the engineering condition that the transfer function of speed measuring realized by position differential in digital mode is equal to a combination of a differential part and an inertia part is offered.

Key words: position differential; speed measuring in digital mode; transfer function

作者简介: 王建立, (1971-), 男, 山东曲阜人。博士研究生。主要从事机电一体化研究工作。