

摄像机标定中一种约束条件选择方法

江加和¹, 宋子善¹, 沈为群¹, 赵玉侠²

(1. 北京航空航天大学自控系动仿, 北京 100083;

2. 洛阳铜加工厂职工大学教务处, 河南 洛阳 471039)

摘要:目前在摄像机标定中, 普遍采用最小二乘法, 约束条件选择对计算精度有很大影响。对以往的约束条件选择进行了分析和总结, 提出了一种新的约束条件选择方法。经过数学推导得到计算公式。解算过程避免了解非线性方程。它充分考虑了参数之间的约束关系, 利用正交矩阵保证 Frobenius 范数不变性来选择约束条件。使误差能按参数之间约束关系进行分配, 从而能提高摄像机标定精度。

关键词:摄像机标定; 计算机视觉; 机器视觉

中图分类号: TN948.41 **文献标识码:** A

1 引言

摄像机对场景的拍摄过程是三维空间的场景在二维空间的投影。在许多领域, 如计算机视觉、数字视频等领域需要一种逆的求解过程, 即从二维图像计算三维运动和结构。在图像上的每一点位置对应于三维场景表面上的相应的点, 它们之间关系由摄像机成像几何模型所决定。该模型由摄像机内外参数决定。所谓摄像机标定就是确定摄像机内外参数。

摄像机标定是计算机视觉中一个重要内容。由图像序列进行三维重建, 首先要解决的问题就是摄像机标定问题, 而且三维重建精度在很大程度上取决于摄像机标定精度。因此研究高精度摄像机标定算法显得尤其重要。对于摄像机标定一般采用最小二乘法^[1-2]。约束条件选择对估算精度有很大影响。本文提出了一种新的约束条件选择方法, 它充分利用了旋转矩阵的六个约束关系, 这些约束关系体现了旋转矩阵为正交矩阵, 而正交矩阵能保证 Frobenius 范数不变, 显然这种方法保证误差能按参数之间约束关系进行分配, 从而可以提高计算精度。

这篇文章的余下部分结构如下: 第2部分简要介绍了摄像机模型和基于一般约束条件下最小二乘法; 第3部分提出了基于旋转矩阵保证范数不变的约束条件选择方法; 最后部分是文章的结论。

矩阵和矢量用黑斜体字母表示, 其余量均用

斜体字母给出。

2 摄像机标定方法^[1-2]

2.1 摄像机模型

CCD 摄像机在实际应用中通常采用针孔模型。设 $O-X_c Y_c Z_c$ 为摄像机坐标系, O_2-u 为图像坐标系 (以像素为单位), O_1-XY 为成像平面坐标系, $O_w-X_w Y_w Z_w$ 为世界坐标系。摄像机坐标系的 OZ_c 轴与图像平面的交点 O_1 , 在摄像机坐标系下的坐标为 $O_1(0, 0, f)$, f 为摄像机系统的等效焦距, 该点在图像坐标系下的坐标为 (u_0, v_0) , 在成像平面坐标系下的坐标为 $(0, 0)$ 。摄像机坐标系下的任意一点 P 的坐标为 (X_c, Y_c, Z_c) , 其投影在图像坐标系下的坐标为 (u, v) , 在成像平面坐标系下的坐标为 (x, y) 。如图 1 所示。

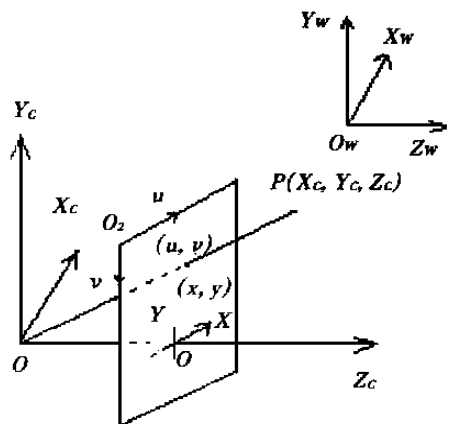


Fig. 1 Camera pin-hole model

由图 1 我们可以得到如下关系:

$$\begin{cases} x = f \times \frac{X_c}{Z_c} \\ y = f \times \frac{Y_c}{Z_c} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = s_u(u - u_0) \\ y = s_v(v - v_0) \end{cases} \quad (2)$$

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 s_u, s_v 分别为像素的宽度和高度, f, u_0, v_0, s_u, s_v 为摄像机内参数, $f_u = f/s_u, f_v = f/s_v$

从三维世界坐标系到摄像机坐标系有如下关系:

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + \mathbf{T} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{T} = [t_1, t_2, t_3]^T$ 为平移矢量; $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}$

为旋转矩阵。 $\mathbf{r}_1 = [r_{11}, r_{12}, r_{13}]^T, \mathbf{r}_2 = [r_{21}, r_{22}, r_{23}]^T, \mathbf{r}_3 = [r_{31}, r_{32}, r_{33}]^T$, 并且它们之间满足如下关系:

$$\mathbf{r}_1^2 = 1 \quad \text{or} \quad r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1 \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_2^2 = 1 \quad \text{or} \quad r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1 \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_3^2 = 1 \quad \text{or} \quad r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2^T = 0, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3^T = 0 \quad \text{or} \quad r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} + r_{13}r_{23} = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3^T = 0, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3^T = 0 \quad \text{or} \quad r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3^T = 0, \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3^T = 0 \quad \text{or} \quad r_{31}r_{11} + r_{32}r_{12} + r_{33}r_{13} = 0 \quad (10)$$

将(4)式代入(3)式得:

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} X_w \quad (11)$$

\mathbf{M} 为 3×4 的投影矩阵:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \mathbf{r}_1^T + u_0 \mathbf{r}_3^T f_u t_1 + u_0 t_3 \\ f_v \mathbf{r}_2^T + v_0 \mathbf{r}_3^T f_v t_2 + v_0 t_3 \\ \mathbf{r}_3^T & t_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.2 通常约束条件下最小二乘法

我们可以利用(11)式计算投影矩阵。设三维空间中第 i 个点的坐标为 (X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}) , 对应的图像坐标为 (u_i, v_i) , 将它们代入(11)式, 则得:

$$Z_{ci} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{wi} \\ Y_{wi} \\ Z_{wi} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将(13)式消除 Z_{ci} 可得到如下两个方程:

$$\begin{aligned} X_{wi}m_{11} + Y_{wi}m_{12} + Z_{wi}m_{13} - u_i X_{wi}m_{31} - u_i Y_{wi}m_{32} - u_i Z_{wi}m_{33} + m_{14} - u_i m_{34} &= 0 \\ X_{wi}m_{21} + Y_{wi}m_{22} + Z_{wi}m_{23} - v_i X_{wi}m_{31} - v_i Y_{wi}m_{32} - v_i Z_{wi}m_{33} + m_{24} - v_i m_{34} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

采用 $n(n \geq 6)$ 点我们可以得到 $2n$ 个关于 m_{ij} 线性方程。

$$\begin{bmatrix} x_{w1} & Y_{w1} & Z_{w1} & 0 & 0 & 0 & -u_1 X_{w1} - u_1 Y_{w1} - u_1 Z_{w1} & 1 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_{w1} & Y_{w1} & Z_{w1} & -v_1 X_{w1} - v_1 Y_{w1} - v_1 Z_{w1} & 1 & 0 & -v_1 \\ & & & \Lambda & \Lambda & \Lambda & & & & \\ & & & \Lambda & \Lambda & \Lambda & & & & \\ X_{wn} & Y_{wn} & Z_{wn} & 0 & 0 & 0 & -u_n X_{wn} - u_n Y_{wn} - u_n Z_{wn} & 1 & 0 & -u_n \\ 0 & 0 & 0 & X_{wn} & Y_{wn} & Z_{wn} & -v_n X_{wn} - v_n Y_{wn} - v_n Z_{wn} & 1 & 0 & -v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \\ m_{14} \\ m_{24} \\ m_{34} \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

利用最小二乘法可以估算各个参数,但是对约束条件选择不同会影响估算精度。

第一种约束条件选择方法^[1-2]。令 $m_{34} = 1$ (也可以选择其他任何参数为 1), 则得:

$$AL = U \quad (16)$$

式中 L 为余下的 11 个未知参数组成的列向量, 即 $L = (m_{11}, m_{12}, m_{13}, \dots, m_{33}, m_{14}, m_{24})^T$, A 为 (15) 式的系数矩阵中的前 $2n \times 11$ 矩阵: $U = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)^T$ 。用最小二乘法很容易得到 $L = (A^T A)^{-1} A^T U$ 。内外参数分解计算请参阅文献[1][2]。

第二种约束条件选择方法^[1]。设 m 为 12 个未知参数组成的列向量, 即 $m = (m_{11}, m_{12}, m_{13}, \dots, m_{33}, m_{14}, m_{34})^T$, 并设 B 为 (15) 式的 $2n \times 12$ 系数矩阵, 令 $m = 1$, 那么 $Bm = 0$ 的最小二乘解为 $B^T B$ 最小特征值的特征向量。

以上两种约束条件选择方法, 没有什么物理意义, 没有考虑参数之间约束关系。投影矩阵 M 中有 12 个参数并非互相独立。投影矩阵 M 中有 12 个参数并非互相独立, 4 个内部参数, 3 个独立旋转矩阵参数, 3 个独立平移参数, 共 10 个独立参数。因此在数据存在误差的条件下, 计算结果肯定是有误差的, 并且误差没有按照参数之间约束关系进行分配, 特别是在分解内外参数时, 误差显得尤其突出。文献[2]提出了一种约束条件选择方法, 考虑了它们之间的一种约束关系, 对提高计算精度还是起到了一定的作用。

第三种约束条件选择方法^[2]。设 $I_3 = (m_{31}, m_{32}, m_{33})$, 增加约束条件 $I_3^2 = 1$, 从 (12) 式可以看出: 实际上仅利用了 $r_3^2 = 1$ 的约束条件, 并没有考虑旋转矩阵中其他约束关系。在这里本文提出了一种约束条件选择方法把旋转矩阵中 6 个约束关系都考虑进去了。

3 利用旋转矩阵保证范数不变选择约束条件

设 $m_1 = (m_{11}, m_{12}, m_{13})^T$, $m_2 = (m_{21}, m_{22}, m_{23})^T$, $m_3 = (m_{31}, m_{32}, m_{33})^T$, 根据 (12) 式, 再利用 (5)(6)(7)(8)(9)(10) 很容易得出:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m_1^T \\ m_2^T \\ m_3^T \end{vmatrix}_F^2 &= \begin{vmatrix} f_u r_1^T + u_0 r_3^T \\ f_v r_2^T + v_0 r_3^T \\ r_3^T \end{vmatrix}_F^2 \\ &= f_u^2 + f_v^2 + u_0^2 + v_0^2 + 1 \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式也表明旋转矩阵 (正交矩阵) 能保证 Frobenius 范数不变。设 $X_9 = (m_1^T, m_2^T, m_3^T)^T$, 则有:

$$X_9^2 = (m_1^T, m_2^T, m_3^T)^T^2 = f_u^2 + f_v^2 + u_0^2 + v_0^2 + 1 \quad (18)$$

显然 X_9 的范数与旋转矩阵无关, 仅与摄像机内部参数有关, 因此可设 $X_9^2 = C$ (C 为由 (18) 式决定的常数) 作为最小二乘的约束条件, 又令 $X_3 = (m_{14}, m_{24}, m_{34})^T$, 从 (15) 式可得到方程:

$$PX_9 + QX_3 = 0 \quad (19)$$

式中 P 为 12×9 矩阵, Q 为 12×3 矩阵。

根据最小二乘准则知即求满足 $X_9^2 = C$ 条件下, $PX_9 + QX_3^2$ 最小值时的 X_9 和 X_3 。根据拉格朗日乘法公式得:

$$H = PX_9 + QX_3^2 + \lambda_1 (X_9^2 - C)$$

即

$$\begin{aligned} H &= (PX_9 + QX_3)^T (PX_9 + QX_3) + \lambda_1 (X_9^T X_9 - C) = \\ &X_9^T P^T P X_9 + X_3^T Q^T Q X_3 + X_9^T P^T Q X_3 + X_3^T Q^T P X_9 + \lambda_1 (X_9^T X_9 - C) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_3} = 2Q^T Q X_3 + 2Q^T P X_9 = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial X_9} &= 2P^T P X_9 + 2P^T Q X_3 + 2\lambda_1 X_9 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

如果 $Q^T Q$ 为非奇异阵, 由 (21) 式得:

$$X_3 = - (Q^T Q)^{-1} Q^T P X_9 \quad (23)$$

把 (23) 代入 (22) 式, 可得:

$$(P^T P - P^T Q (Q^T Q)^{-1} Q^T P) X_9 = \lambda X_9 \quad (24)$$

式中 $\lambda = -\lambda_1$

设 $D = (P^T P - P^T Q (Q^T Q)^{-1} Q^T P)$, X_9 为矩阵 D 的特征值 λ 对应的特征向量, 矩阵 D 的特征值有好几个, 是哪个特征值呢?

$$\begin{aligned} PX_9 + QX_3^2 &= X_9^T P^T P X_9 + X_3^T Q^T Q X_3 + \\ &X_9^T P^T Q X_3 + X_3^T Q^T P X_9 = X_9^T P^T P X_9 + \\ &X_9^T P^T Q ((Q^T Q)^{-1})^T Q^T Q (Q^T Q)^{-1} Q^T P X_9 - \\ &X_9^T P^T Q (Q^T Q)^{-1} Q^T P X_9 - \\ &X_9^T P^T Q ((Q^T Q)^{-1})^T Q^T P X_9 = \\ &X_9^T (P^T P - P^T Q (Q^T Q)^{-1} Q^T P) X_9 \\ &X_9 = \lambda X_9^T X_9 = \lambda C \end{aligned}$$

可见 λ 为矩阵 D 的最小特征值, X_9 为矩阵 D 的最小特征值对应的特征向量, X_3 由 (23) 式求得,

从而得到了投影矩阵 M 中的 12 个参数。从上面推导过程, 我们可以知道约束条件选择利用了旋转变矩阵的 6 个约束关系, 而且包含了文献[2]提出的约束条件, 因此当数据有误差时, 误差能按参数之间约束关系进行分配, 从而提高了计算精度。

4 结 束 语

本文基于摄像机的针孔模型, 对目前摄像机

参考文献:

- [1] 马颂德, 张正友. 计算机视觉[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [2] Faugeras O D, Toscani G. Camera calibration problem for 3D computer vision[A]. Proc. of International Workshop on Industrial Application of Machine Vision Machine Intelligence[C]. Japan: 1986. 240- 247.

Constraint condition selection method in camera calibration

JIANG Jia-he¹, SONG Zi-shan¹, SHEN Wei-qun¹, ZHAO Yu-xia²

(1. *Dynamic Simulation Laboratory, Dept. of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;*

2. *Teaching Office, Worker College, Luoyang Copper Working Plant, Luoyang 471039, China)*

Abstract: At present, least squares algorithm is generally used to calibrate cameras. Constraint condition selections have a great effect on estimating precision. On the basis of analysis to former selections of constraint condition, a new constraint condition selection method is represented. Computing formulas of parameters are got after mathematical derivation. The algorithm avoids solving nonlinear equation. After constraint relations between parameters are observed and studied, a constraint condition is selected using the property that orthogonal matrix ensures Frobenius norm to be unvarying. Errors are distributed in the light of constraint relations between parameters, so precision of camera calibration can be improved.

Key words: camera calibration; computer vision; machine vision

作者简介: 江加和(1965-), 男, 江西波阳人, 博士生, 工程师, 主要从事计算机视觉、多媒体、图像处理和数字视频技术的研究工作。

标定方法进行了分析。采用最小二乘法求解, 其约束条件的选择对计算精度至关重要, 系统分析了以往约束条件的选择方法的优缺点, 经过数学推导, 提出了一种约束条件选择方法, 得到了求解公式。它充分考虑了变量之间的约束关系, 利用正交矩阵能保证 Frobenius 范数不变性来选择约束条件。求解过程避免了非线性方程的求解。保证误差按约束关系进行分配, 使精度得到提高。