

文章编号 1004-924X(2001)01-0047-04

# 基于最小均方误差原理 的医学 X 光影像滤波阈值选择

刘光达, 赵立荣

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 固有噪声和量子噪声构成了医学 X 光影像系统的干扰噪声。它们在统计规律上分别是依从高斯分布和泊松分布的随机空间波动。本文从理论上推导出了基于小波变换原理的医学 X 光影像的固有噪声抑制和消除处理中的最优滤波阈值选择。通过对实际 CT 影像的消噪处理应用, 实现了基于最小均方误差原理的医学 X 光影像的滤波处理。

**关键词:** 医学 X 光影像; 噪声消除; 小波变换; 滤波阈值

**中图分类号:** R445.4 **文献标识码:** A

## 1 医学 X 光影像系统的噪声分类

医学 X 光摄影已有近百年的应用与发展历史。在科学高度发达的今天, 超声(SW)、计算机层析成像(CT)、核磁共振成像(MRI)、数字减影血管造影(DSA), 以及计算机 X 线摄影(CR)等, 形成了数字化的医学 X 光影像学的发展趋势。

医学 X 光影像系统的噪声可归纳为两大类: 量子噪声(又称为 X 线量依赖性噪声)和固有噪声(非 X 线量依赖性噪声)。

量子噪声又分为 X 线量子噪声和光量子噪声。X 线量子噪声是指 X 线被 IP 吸收过程中产生的噪声。在物理学中定义的 X 线量子噪声, 是指 X 线量子依泊松(Poisson)分布统计规律而产生的随机空间波动。量子噪声是以泊松(Poisson)分布统计规律存在的随机空间波动。不同于加性高斯白噪声, 量子噪声的方差与所依附信号的强度成正比。

固有噪声包括影像系统的结构噪声, 光源噪声, 模拟电路噪声, 光电转换和模/数转换过程中产生的电器系统噪声等。它们都是以高斯分布的白噪声的形式存在的。

图 1 给出了影像系统噪声量(RMS)随 X 线辐射剂量的变化曲线。从中看到, RMS 与影像系统检测到的 X 线量是成反比例的关系。入射 X 线

剂量越大, X 线量子噪声越小。在入射 X 线的低剂量辐射区, 噪声量 RMS 值对 X 线辐射剂量的响应近似一直线下下降, 表明该区域的噪声主要是由 X 量子线的波动, 也即量子噪声引起的。而在高剂量区 RMS 值大致接近一恒定值, 基本不依赖于 X 线辐射剂量的变化, 所以在此区域, 主要是非 X 线量依赖性噪声, 即固有噪声。

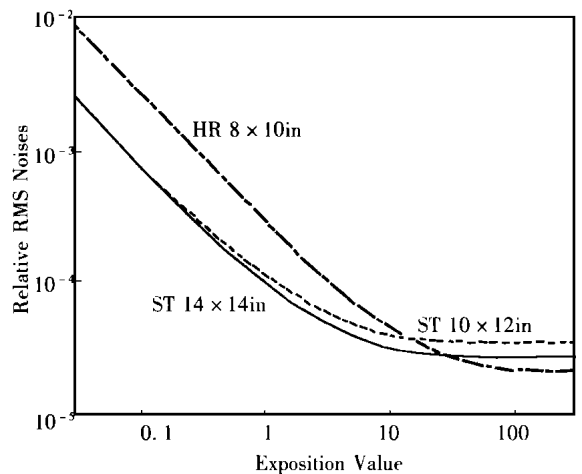


Fig 1 Varying curves of RMS with X-ray radiation

## 2 X 光影像系统宽带随机白噪声 在小波变换下的特性

小波变换(Wavelet Transform)是近十年来迅速发展起来的一个新的数学分支。它引入了多

尺度的概念。小波函数是由基小波  $\Psi$  (Basis Wavelet) 通过伸缩(dilation)和平移(translation)而产生的一个函数族  $\Psi_{a,b}(x)$  :

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1)$$

$f(x) \in L^2(R)$  的小波变换定义为以函数族  $\Psi_{a,b}(x)$  为积分核的积分变换,如下式所示:

$$(W_{\Psi} f)(a,b) = W f(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{a,b}(x) dx \quad (2)$$

其中基小波  $\Psi(x)$  必须满足允许条件

$$C_{\Psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(w)|^2}{|w|} dw < +\infty \quad (3)$$

$a \in R^+, b \in R$ ,  $a, b$  分别为尺度因子和平移因子。

用于影像信号分析的二维离散小波分析是一维分析的直接推导。在基于多分辨率分析的框架下,通过Mallat塔式算法,可以实现对离散信号的分解和重构的快速算法。

设  $n(x)$  是一个实的、方差为  $\sigma^2$  的宽平稳白噪声,  $W_n(s, x)$  是它的尺度为  $s$  的小波变换,  $W_n(s, x)$  也是一随机过程,其方差与小波范数  $\Psi$  的平方成正比

$$E(|W_n(s, x)|^2) = \frac{\Psi^2 \sigma^2}{s} \quad (4)$$

由上式可见,随着分辨率降低( $s$  增大),频率也同时降低,白噪声的小波变换值逐渐减少,信号占主导地位;相反,随着分辨率的提高( $s$  减小),频率也逐渐提高,白噪声的小波变换值也逐渐增大,信号则被噪声淹没。白噪声的小波变换特性如下:

(1) 如果所分析的信号是一个平稳、零均值的白噪声,则其小波分解系数是不相关的;

(2) 如果  $s$  是一个平稳、零均值的高斯噪声系列,则其小波分解系数也是高斯序列。对每一个分解尺度,其系数是一个平稳的序列;

(3) 如果  $s$  是一个高斯噪声,则其小波分解系数是独立的,也是高斯分布的。

### 3 基于小波变换的影像消噪原理

从对影像信号和噪声的小波变换特性的分析可以看出:

(1) 对于在空间不均匀分布的影像信号,其小波系数只是在影像细节处的少数像素点有大值,而大部分点的小波系数值都很小;

(2) 高斯白噪声的小波变换,也是高斯白噪

声,它对所有小波系数的影响都是一样的。

从以上两点分析,白噪声对所有像素点的小波系数都有影响,而信号只对极少数像素点的小波系数有影响。如果我们将低于某个设定阈值(主要由白噪声引起)的小波系数重置为零,而保存高于该阈值的小波系数,则重建后的小波系数主要是由真实信号  $f$  引起的。通过对这些小波系数进行小波逆变换,则重建后的信号就是真实信号  $f$  的估计值。这样,就实现了对含噪声影像信号的消噪处理。

### 4 基于最小均方误差原理的滤波阈值选择

CR 系统小波变换域消噪处理的滤波阈值基于两个考虑:

(1) 重建影像  $\bar{F}$  与真实影像  $F$  具有相同的光滑度;

(2) 重建影像  $\bar{F}$  是一个最小均方误差估计的结果。

以上两个条件要求相应的小波变换域滤波满足下式:

$$E \left[ \frac{1}{M \times N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |\bar{F} - F|^2 \right] = \min \quad (5)$$

即

$$E \left[ \overline{W S} - W F \right] = \min \quad (6)$$

上式中假设影像  $F$  的尺寸为  $M \times N$  像素。

在一维情况下,根据(6)式,从信号  $f(i), i = 0, 1, \dots, n-1$  可推导出:

$$\frac{1}{n} E \left[ \bar{f} - f \right]^2 = \delta \sqrt{2 \ln(n)} \quad (7)$$

因而阈值  $thold$  取为:

$$thold = \delta \sqrt{2 \ln(n)} \quad (8)$$

原始噪声传播到第  $m$  个尺度上的噪声水平方差为:

$$\delta(m) = \left[ \prod_{i=0}^{m-2} * H_i \right] * G_{m-1} \cdot \delta \quad (9)$$

其中,  $*$  表示卷积,  $H_i$  表示  $H$  的  $2^i$  尺度膨胀,  $G_{m-1}$  表示  $G$  的  $2^{m-1}$  尺度膨胀,  $\cdot$  为范数。

此时, (7) 式变为:

$$\frac{1}{n} E \left[ \bar{f} - f \right]^2 = \delta(j) \sqrt{2 \ln(n)} \quad (10)$$

因此,尺度  $j$  上的阈值为

$$thold(j) = \delta(j) \sqrt{2 \ln(n)} \quad (11)$$

其中,

$$\delta(j) = \left[ \prod_{i=0}^{j-2} * H_i \right] * G_{j-1} \cdot \delta \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式, 得阈值为

$$thold(j) = \left( \prod_{i=0}^{j-2} * H_i \right) * G_{j-1} * F \delta \sqrt{2 \ln(n)} \quad (13)$$

推广到二维影像情况, 选定阈值为

$$thold(j) = \left( \prod_{i=0}^{j-2} * H_i \right) * G_{j-1} * F * \prod_{i=0}^{j-1} * H_i * F * \delta * 2 \ln(n) \quad (14)$$

采用上述原理, 我们完成了对两个医学 CT 影像(人体头部)的消噪处理。

图 2 和图 3 分别给出了对这两个含噪影像的处理结果。

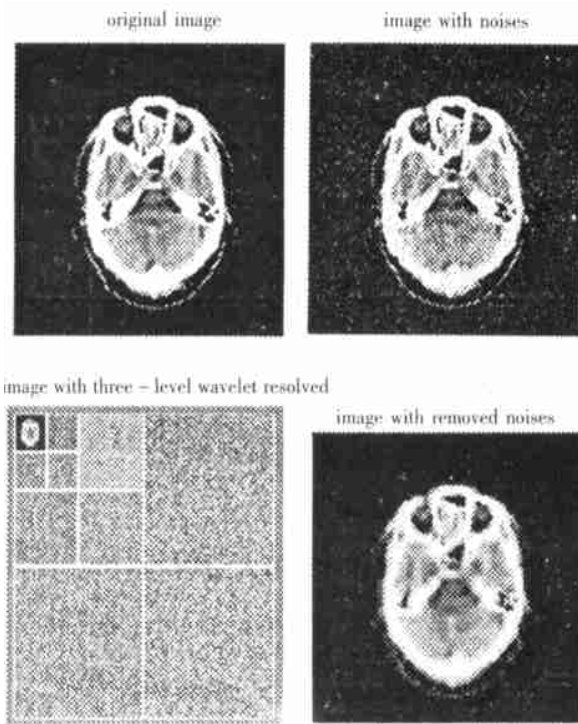


Fig 2 The first head image removed random noises using WT

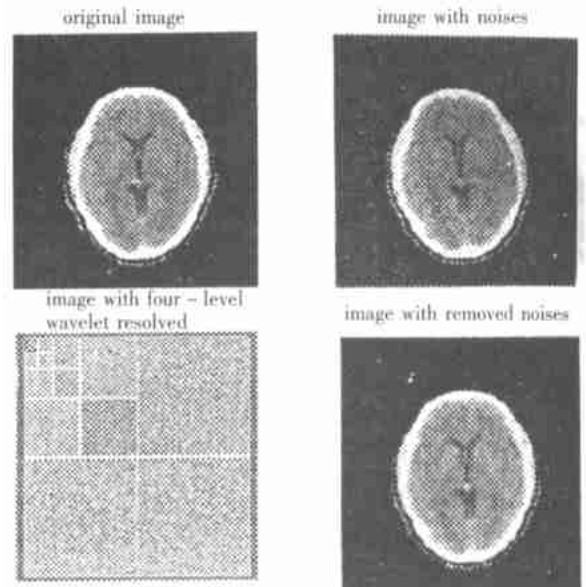


Fig 3 The second head image removed random noises using WT

## 5 结 束 语

对于 X 光影像系统中的平稳、零均值的白噪声, 由于其在小波变换域也是高斯序列, 并且对于每一个分解尺度, 其系数也是一个平稳序列, 所以, 它对影像各像素点的影响是均匀的, 不随像素点能量的大小变化而改变。依照最小均方误差原理选定滤波阈值, 可以对高斯白噪声进行有效的抑制和消除, 而同时又能保持影像信号的高频特征。但对于依泊松分布的量子噪声, 由于其偏差和信号能量呈线性关系, 其对影像各像素点的影响是不均匀的, 所以基于最小均方误差原理的固定阈值的小波变换域消噪处理不适用于量子噪声。有关这方面的内容, 也是我们今后需要加以研究的。

## 参考文献:

- [1] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation[J]. IEEE Trans on Pattern Machine Intell, 1989, 11(7): 674- 693
- [2] 闫丽, 袁家虎, 刘江, 李展, 等. 光学子波用于图像处理[J]. 光学精密工程, 2000, 8(3): 225- 230
- [3] 彭玉华. 基于离散正交小波变换的图像去噪方法[J]. 中国图像图形学报, 1999, 4(8): 677- 679.
- [4] 郭小方, 等. 基于小波分析的成像光谱图像随机噪声消除[J]. 遥感学报, 1999, 3(3): 183- 190
- [5] 潘泉, 等. 基于阈值决策的子波域去噪方法[J]. 电子学报, 1998, 26(1): 115- 117.

## Threshold selection method for medical X-ray images filter based on minimum even-square error

LIU Guang-da, ZHAO Li-rong

*(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,  
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022, China)*

**Abstract:** Disturbance noises in medical X-ray imaging systems consist of inherent and quantum noises, which obey random Gauss and Poisson distributions, respectively. This paper theoretically provided an optimum threshold selection method for medical X-ray images filter. Through practical process of CT images, medical X-ray images filter based on minimum even-square error has been accomplished in this work.

**Key words:** medical X-ray images; removal of noises; filter threshold; wavelet transformation (WT)

**作者简介:** 刘光达(1964- ),男,吉林长春人,研究员,长春光机所在职博士生。研究方向为激光扫描成像技术及图像信号处理。研究成果获得中科院科技进步奖等奖励。在国内学术刊物上发表数篇研究论文。