

文章编号 1004 924X(2001)03 0242-05

一种新的机械手最优轨迹的规划算法

陈忠泽, 颜国正, 林良明, 蔡弘

(上海交通大学电子信息学院精密工程及智能微系统研究所, 上海 200030)

摘要: 机械手轨迹规划的目标是其运行的快速、准确和平稳。基于这一目的, 我们提出了一种新的获取机械手最优轨迹的能量最小准则: 给定机械手末端轨迹的始末位置, 根据其各自由度的加速度积分和最小的能量最小准则寻求满足约束的最优(平滑)轨迹。实验表明, 规划的轨迹不仅平滑, 而且安全(具有最优的速度、加速度轮廓)。

关键词: 机械手; 最优轨迹; 规划

中图分类号: TP242 文献标识码: A

1 引言

机械手轨迹规划的目标是其运行的快速、准确和平稳。快速就是高效率: 以尽可能短的时间从起始点运行到目标点; 准确指机械手运动轨迹满足路径约束和障碍约束; 而平稳即运行过程中轨迹平滑、速度及加速度处处连续, 它不仅是机械手自身保持良好运行状态的前提, 也常常是操作任务对机械手的一个必不可少的要求。为了满足以上要求, 人们提出了各种各样的最优轨迹的能量优化函数, 如路径^[1,2]、时间^[3,4]、轨迹曲率及其导数^[5]、轨迹的切向和法向加速度^[6]等。从理论上讲, 这些轨迹是能量函数最小意义上最优的, 但由于机械手末端在笛卡尔坐标空间的轨迹与其在关节坐标空间状态之间并不是一一映射的关系, 这样在关节坐标空间根据上述能量优化函数规划的轨迹, 可能导致机械手手部的轨迹产生无法预料的后果, 反之特性良好的手部轨迹在关节这一级控制时可能导致难以满足驱动器的物理约束的问题。为此, 本文将综合考虑两坐标空间的轨迹, 设计相应的能量准则函数, 以规划两坐标空间均能较好接受的轨迹。其基本思想是: 在笛卡尔坐标空间中描述机械手末端的始末位及约束位, 再将它们逆射到关节坐标空间(选择使各关节运动

距离最为接近的那组解), 并做为关节坐标空间的约束和边界条件参与规划。而能量准则函数为关节矢量空间各维加速度平方和与对应的笛卡尔空间轨迹加速度分量平方和的加权和在起点至目标位过程的积分。

2 能量优化函数及优化原理

设 n 自由度机械手状态用 n 维矢量空间 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 的点表示(其中 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为机械手的关节广义坐标), 抓手的位形矩阵

为 $T = \begin{bmatrix} (t_{ij})^{3 \times 3} & (t_{i4})^{3 \times 1} \\ (0)^{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ (矩阵元素为关节矢量空间点的函数), 则机械手的对应状态 q 的手部位形可用矢量空间 $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T =$

$[\alpha, \beta, \gamma, t_{14}, t_{24}, t_{34}]^T$ (其中 x_1, x_2, x_3 为抓手的形态广义坐标, 取为框架角 (α, β, γ) , x_4, x_5, x_6 为抓手位置的笛卡尔坐标)表示, 且有如下关系^[7]:

$$\alpha_1 = \arctan(-t_{23}/t_{33}), \alpha_2 = \alpha_1 + 180^\circ \quad (1)$$

$$\beta = \arctan(t_{13}/(-t_{23}\sin\alpha + t_{33}\cos\alpha)) \quad (2)$$

$$\gamma = \arctan((t_{21}\cos\alpha + t_{31}\sin\alpha)/(t_{22}\cos\alpha + t_{32}\sin\alpha)) \quad (3)$$

根据前述引入能量优化函数:

$$\Phi = \int_{\text{start}}^{\text{end}} (w_1 \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 + w_2 \sum_{j=1}^6 \dot{x}_j^2) dt \quad (4)$$

收稿日期: 2001-01-17; 修订日期: 2001-03-01

基金项目: 上海市曙光计划资助应用基础研究课题“精度造船型材切割机器人系统研究”

上式中 $\ddot{x}_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ 为手部笛卡尔轨迹的各加速度分量, 它们均为机械手关节广义坐标 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的函数; w_1, w_2 为权重系数。最优轨迹是使得式(4)取最小值且满足以下约束和边界条件的 $q_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

约束条件为:

$$\int_{\text{start}}^{\text{end}} \dot{q}_i dt = q_i^{\text{end}} - q_i^{\text{start}} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

以及

$$\int_{\text{start}}^{\text{end}} \dot{x}_j dt = x_j^{\text{end}} - x_j^{\text{start}} (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (6)$$

边界条件:

$$q_i(t_{\text{start}}) = q_i^{\text{start}}, q_i(t_{\text{end}}) = q_i^{\text{end}} \quad (7)$$

和

$$x_j(t_{\text{start}}) = x_j^{\text{start}}, x_j(t_{\text{end}}) = x_j^{\text{end}} \quad (8)$$

这里的轨迹规划实际上已转化为带约束的函数求极值问题, 因而可以用拉格朗日法求解。

$$\begin{aligned} \Phi = \min & \left(\int_{\text{start}}^{\text{end}} (w_1 \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i^2 + w_2 \sum_{j=1}^6 \ddot{x}_j^2) dt \right) = \\ & \min \left(\int_{\text{start}}^{\text{end}} (w_1 \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i^2 + w_2 \sum_{j=1}^6 \ddot{x}_j^2 + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(q)} \dot{q}_i + \sum_{j=1}^6 \lambda_j^{(x)} \dot{x}_j) dt \right) \quad (9) \end{aligned}$$

$\lambda_i^{(q)} (i = 1, 2, \dots, n), \lambda_j^{(x)} (j = 1, 2, \dots, 6)$ 为拉格朗日乘子。

其中:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i, \ddot{x}_j = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \ddot{q}_i \quad (10) \end{aligned}$$

令 $u_i^{(1)} = \dot{q}_i, u_j^{(2)} = \dot{x}_j$, 则 $\dot{u}_i^{(1)} = \ddot{q}_i, \dot{u}_j^{(2)} = \ddot{x}_j$ 。使泛函式(9)取得最小值的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\varphi_{u_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \varphi_{\dot{u}_i^{(1)}} = 0 (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

$$\varphi_{u_j^{(2)}} - \frac{d}{dt} \varphi_{\dot{u}_j^{(2)}} = 0 (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (12)$$

$\varphi_{u_i^{(1)}}, \varphi_{\dot{u}_i^{(1)}}, \varphi_{u_j^{(2)}}, \varphi_{\dot{u}_j^{(2)}}$ 分别为目标函数 Φ 对 $u_i^{(1)}, \dot{u}_i^{(1)}, u_j^{(2)}, \dot{u}_j^{(2)}$ 的偏微分。

式(9)代入式(11)、(12)即:

$$2w_1 \ddot{u}_i^{(1)} = \lambda_i^{(u_i^{(1)})} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

$$2w_2 \ddot{u}_j^{(2)} = \lambda_j^{(u_j^{(2)})} (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (14)$$

上述非线性方程(13)、(14)的解:

$$u_i^{(1)}(t) = \frac{\lambda_i^{(u_i^{(1)})}}{4w_1} t^2 + c_i^{(1)} t + c_i^{(0)} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

$$u_j^{(2)}(t) = \frac{\lambda_j^{(u_j^{(2)})}}{4w_2} t^2 + d_j^{(1)} t + d_j^{(0)} (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (16)$$

式(15)、(16)的 $c_i^{(1)}, c_i^{(0)}, d_j^{(1)}, d_j^{(0)}$ 为待定常数, 它们由初始及边界条件确定。

另根据关系式(10)的 $\dot{x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i$, 有:

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^{(u_1^{(1)})}}{w_2} & d_1^{(1)} & d_1^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\lambda_6^{(u_6^{(2)})}}{w_2} & d_6^{(1)} & d_6^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} & \frac{\lambda_1^{(u_1^{(1)})}}{w_1} & c_1^{(1)} & c_1^{(0)} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_6}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_6}{\partial q_n} & \frac{\lambda_n^{(u_n^{(1)})}}{w_1} & c_n^{(1)} & c_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (17)$$

由式(15)、(16)决定的两坐标系的轨迹并不是孤立的, 它们有式(17)的联系, 实际上满足了该约束的(15)式的解也是(16)式的解, 笛卡尔坐标轨迹实际上已通过赋予关节坐标轨迹如式(17)的约束参与了优化, 故而联立求解(15)、(17)即可。

这样, 在规划过程中既避免了由位形矩阵求逆带来的麻烦(运算量大且解不唯一), 又考虑了机械手末端的笛卡尔轨迹的优化。规划基本上转移到了关节空间进行: 直接用运动时的受控变量(这里是关节广义坐标)规划轨迹, 因而计算量小; 同时它又考虑到手部的笛卡尔轨迹, 可以保证机械手末端的笛卡尔轨迹满足预定约束, 如以可以接受的准确性经过预先设置的路径点, 运行过程平稳等。

3 最优轨迹的求解

由轨迹的参数化形式解式(15)、(16)可知, 每一维的方程有四个常数待求, 其中一个为权调节参数, 它可以预先根据拟优化目标设定, 当 w_1 较大时, 更着重关节坐标系的轨迹优化, 反之, 更多地考虑机械手末端笛卡尔轨迹优化, 其它待求常数必须由初始条件和(或)边界条件确定。

在根据机械手的几何及物理约束给定相关常系数的值后,其余常系数先设置一初始值,然后根据约束(5或6)定义一个评价函数 δ (如式(18))对该常系数的当前值满足约束的程度进行评价并根据评价对它做出修改。表征解满足约束的程度的量为:

$$\delta_i^{u(1)} = \int_{\text{start}}^{\text{end}} u_i^{(1)} dt - (q_i^{(\text{end})} - q_i^{(\text{start})}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18a)$$

$$\delta_j^{u(2)} = \int_{\text{start}}^{\text{end}} u_j^{(2)} dt - (x_j^{(\text{end})} - x_j^{(\text{start})}) \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (18b)$$

使上约束式 $\delta = 0$ 时的解 $u(t)$ 即为满足要求的解。由式(15)(或(16))的物理意义,常数项系数表示在轨迹初始点速度,一次项系数则是初始加速度,而拉格朗日乘子则决定了轨迹过程的加速度变化。在机械手轨迹的实际规划中还要考虑它的物理约束。假设已知初始加速度 $u_i^{(u_i^{(1)})}$ (t_{start}),目标点的速度 $u_i^{(u_i^{(1)})}$ (t_{end})及加速度变化的初步值 $^{(0)}\lambda_i$,则可以采用牛顿法搜索满足几何约束条件(15)(或(16))的 $^{(\text{contended})}\lambda_i$,即先给定初始搜索点 $^{(0)}\lambda_i$,然后按下式修正系数矢量 $\lambda = (\lambda_1^{(u_1^{(1)})}, \dots, \lambda_n^{(u_n^{(1)})})$:

$$J|_{\lambda^{(0)}} \lambda - ^{(0)}\lambda = - (\delta_1^{(u_1^{(1)})}, \dots, \delta_n^{(u_n^{(1)})})^T \quad (19)$$

$\delta_i = \delta_i^{(u_i^{(1)})}\lambda_i$,而雅可比矩阵 J 为:

$$J = (J_1^{(u_1^{(1)})}, J_2^{(u_2^{(1)})}, \dots, J_n^{(u_n^{(1)})})^T \quad (20)$$

$$J_i^{(u_i^{(1)})} = \frac{\partial \delta_i^{(u_i^{(1)})}}{\partial \lambda_i^{(u_i^{(1)})}} \quad (21)$$

由式(13)得:

$$\frac{\partial \delta_i^{(u_i^{(1)})}}{\partial \lambda_i^{(u_i^{(1)})}} = \int_{\text{start}}^{\text{end}} \frac{t^2}{4w_1} dt \quad (22)$$

为加快收敛过程,可在式(19)中引入牛顿阻尼因子。一旦满足收敛条件,就可以根据下式求取最平滑轨迹:

$$q_i(t) = q_i^{(\text{start})} + \int_{\text{start}}^t u_i^{(1)}(t) dt \quad (23)$$

$$x_j(t) = x_j^{(\text{start})} + \int_{\text{start}}^t u_j^{(2)}(t) dt \quad (24)$$

如果最后的优化轨迹超出了轨迹的物理约束,则必须重新设定初始条件值直到同时满足物理约束

为止。

4 最优轨迹规划算法小结

根据前述讨论,可将最优轨迹规划算法小结如下:

Step 1. 在笛卡尔坐标空间给定机械手末端的起始位形 $x_i^{(\text{start})}$ 和目标位形 $x_i^{(\text{end})}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$),并由此始末位形求关节的起点坐标 $q_i^{(\text{start})}$ 和终点坐标 $q_i^{(\text{end})}$ ($i = 1, 2, \dots, n$);初始化牛顿法求轨迹参数的迭代次数 $n_{\text{iteration}} = 0$;

Step 2. 给定初始及边界条件,即方程(15)的一次项及常数项系数,设置二次项系数的初始值 $^{(0)}\lambda$;

Step 3. 采用当前常系数的值由式(13)求得 δ ; 如果 δ 一致达到预定的精度,处理 Step 7, 否则处理 Step 4;

Step 4. 再由式(20~22)求当前迭代过程的雅可比矩阵 $J(^{n_{\text{iteration}}}\lambda)$;

Step 5. 循环($j = 1, 2, \dots$)计算:

$$J(^{n_{\text{iteration}}}\lambda) (\lambda^{(j)} - ^{n_{\text{iteration}}}\lambda) = - \mu \delta(^{n_{\text{iteration}}}\lambda) \quad (25)$$

这里 $\mu = 1/2^{j-1}$ 乃为加快牛顿法收敛过程而引入的阻尼因子,如果 $\|\delta(\lambda^{(j)})\|_2 < \delta(^{n_{\text{iteration}}}\lambda)\|_2$, 则令 $^{(n_{\text{iteration}})}\lambda = \lambda^{(j)}$;

Step 6. $n_{\text{iteration}} = n_{\text{iteration}} + 1$, 返回 Step 3;

Step 7. 用(15~16)及(23~24)求得机械手的关节坐标及笛卡尔坐标轨迹,并校验优化轨迹是否满足机械手的物理约束,若满足,则结束;否则返回 Step 2。

5 实验结果

本文已采用前述机械手的轨迹规划算法为本实验室的4自由度机械手作了理想轨迹的生成,结果表明产生的轨迹平滑性良好,易于控制实现(控制算法另文发表)。图1-4示出了其中的一组规划轨迹。

6 结 论

本文把最优轨迹的能量函数定义为机械手关节空间各自由度的加速度和与机械手末端位形的笛卡尔空间轨迹各广义坐标方向加速度和的加权

和之积分。轨迹的规划通过数字迭代过程求解边界及初始条件约束问题实现, 迭代过程收敛快速。轨迹由一系列的短直线段所组成, 实验结果表明, 相邻直线段之间的过渡平滑; 其速度及加速度的轮廓良好, 易于控制实现。

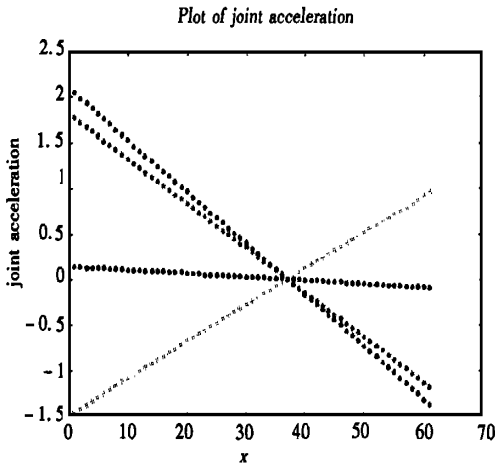


Fig. 1 Acceleration in all 4 ROFs of the Manipulator

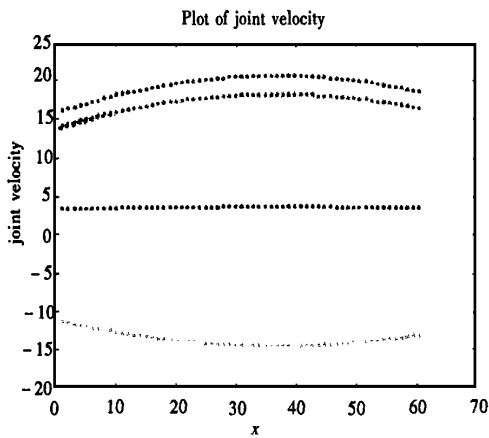


Fig. 2 Velocity in all 4 ROFs of the manipulator

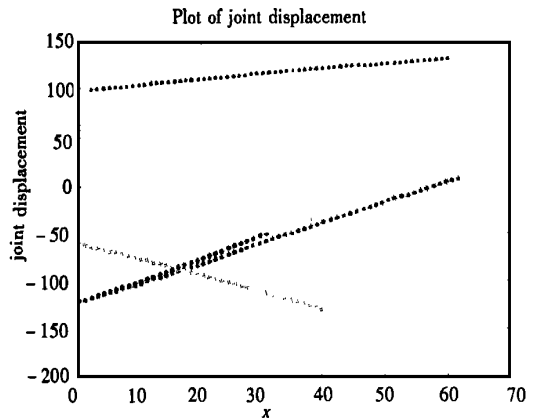


Fig. 3 Displacement in all 4 ROFs of the manipulator

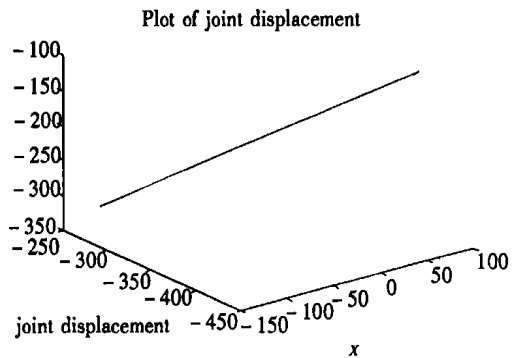


Fig. 4 Trajectory for tip of the manipulator

参考文献:

[1] Dubins K. On curves of minimal length with constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents[J]. American Journal of Mathematics, 1957, 79(3): 497- 516.
 [2] Loumond J.P. Finding collision free smooth trajectories for a non- holonomic mobile robot[A]. Proceeding 10th Int. Joint Conference on AI[C]. 1987, 1120- 1123.
 [3] Jiang K, et al. Minimal time smooth path planning for a mobile robot with kinematic constraints[A]. Proceeding IEEE Int. Workshop on Emerging Tech. and Factory Automation: Technology for Intelligent Factory[C]. 1992, 531- 536.

- [4] Cao B, et al. Time optimal and smooth constrained path planning robot manipulators[A]. Proceeding 1994 IEEE Int. Conference on Robotics & Automation[C]. San Diego, California, USA, 1994.
- [5] Kanayama Y, et al. Smooth local path planning for autonomous vehicles[A]. Proceeding IEEE Int. Conference on Robotics & Automation[C]. Philadelphia, Pennsylvania, USA, 1980.
- [6] Hussein A M, et al. On optimal constrained trajectory planning in the plan[J]. International Journal on Robotics & Automation, 1999, 14(1): 33- 38.
- [7] 诸静. 机器人与控制技术[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1992.

Novel approach to generating optimal smooth trajectory for a manipulator

CHEN Zhong ze, YAN Guo zheng, LIN Liang-ming, CAI Hong

(No. 820 Lab, College of Electronics and Information,
Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030, China)

Abstract: This paper deals with a novel approach to generating optimal smooth trajectory. Giving the start point and the target point in the workplace of the manipulator, the authors put forward the minimal energy trajectory that minimizes the integral of squared acceleration in each ROF, which is solved by a numerical iterative procedure that is devised for a solution of a constrained boundary value problem. The results show that the planned trajectories are not only smooth but also safe with optimal velocity and acceleration profile.

Key words: robot manipulators; optimal trajectory; planning

作者简介: 陈忠泽(1969-), 男, 湖南邵阳人, 博士研究生, 研究方向: 机器人的智能控制。E-mail: zzchen801@263.net
颜国正(1961-), 男, 湖南益阳人, 博士生导师, 研究方向: 机器人学。
林良明(1936-), 男, 福建莆田人, 博士生导师, 研究方向: 机器人学。
蔡弘(1976-), 女, 上海市人, 硕士研究生, 研究方向: 控制理论及工程。