文章编号　1004-924X(2001)03-0220-03

权因子对B样条曲线形状影响的研究

陈锦昌[1], 梁利东[1], 刘桂雄[2], 肖　炎[2]
(1. 华南理工大学制图教研室, 广东 广州　510640;
2. 华南理工大学光机电一体化研究所, 广东 广州　510640)

摘要: 通过对三次均匀有理B样条曲线权因子几何意义的分析, 从而研究了三次有理B样条曲线的几何特性。在此基础上深入探讨了权因子对于B样条曲线形状的影响, 为更好地构造满足特定要求的B样条曲线提供了一种途径。

关　键　词: B样条; 权因子; 形状控制
中图分类号: TB23　　文献标识码: A

1　引　　言

随着现代工业中自由形状产品的大量涌现, 对自由曲面的检测和表示一直是专家学者研究的热点, 与此同时非接触光学式自由测量技术得以蓬勃发展, 它以现代光学为基础, 融光电子学、计算机图形学、信息处理和计算机视觉等科学技术为一体, 信息获取手段丰富而得到广泛的应用。在自由曲面的表示和测量的基础研究中, 我们发现权因子对均匀有理B样条曲线的形状控制具有很重要的作用。选定不同的权因子对于具有同样控制顶点的曲线有着调节作用, 而不同的权因子组合对曲线参数化的影响也不相同。理解权因子的几何意义以及它对曲线形状的控制对于特定曲线的构造或为满足要求的曲线的构造具有重要的意义。

2　权因子的几何意义

在均匀有理B样条曲线构造的研究中, 给出所有控制顶点的权因子 $W_0, W_1, W_2 \cdots W_n$, 假设只改变 W_i, 而使所有的控制顶点及其它的权因子保持不变, 则权因子 W_i 仅仅影响在区间 $[u_i, u_{i+k+1}] < [u_k, u_{n+1}]$ 上的那部分曲线的形状, 对其它部分不发生影响。在这段曲线中如果 W_i 在某个范围内变化, 则我们得到一族曲线, 如图1所示。另一方面, 如果我们固定曲线的参数 u, 而使 W_i 变化, 则曲线方程变成为以 W_i 为参数的一直线方程。这表明, 这一族曲线上参数 u 值相同的点都位于同一直线上。当 $W_i \to \infty$ 时, $R_i, (u; W_i \to \infty) = 1$, 故该直线通过控制顶点 $d_i = p(u; W_i \to +\infty)$; 当 $W_i = 0$ 时, $R_{i,k} = (u; W_i = 0) = 0$, 这时控制顶点 d_i 对曲线不起作用。对应得到点 $m = p(u; W_i = 0)$; 当 $W_i = 1$, 对应得到点 $n = p(u; w_i = 1)$。当 $w_i \neq 0, 1$ 时, 相应有点 $p = p(u; W_i \neq 0, 1)$。令

$$\alpha = R_{i,k}(u; W_i = 1) = \frac{N_{i,k}(u)}{\sum_{i \neq j = 0}^{n} W_j N_{j,k}(u) + N_{i,k}(u)};$$

$$\beta = R_{i,k}(u; W_j \neq 0, 1) = \frac{W_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i \neq j = 0}^{n} W_j N_{j,k}(u) + W_i N_{i,k}(u)}$$

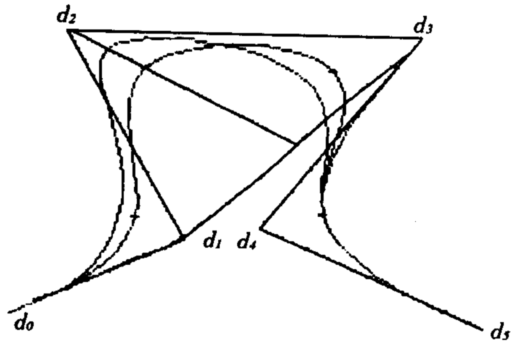

Fig. 1　Geometric significance of the weight

收稿日期: 2001-02-30; 修订日期: 2001-04-20
基金项目: 光电技术及系统教育部重点实验室开放基金资助(CETD00-08)

其中, $N_{i,k}(u)$, $i = 0, 1, \cdots n$ 称为 k 次规范 B 样条基函数。

则可给出关系:

$$n = (1-\alpha)m + \alpha d_i, P = (1-\beta)m + \beta d_i$$

于是有下列关系式

$$\frac{\overline{d_i n}}{\overline{nm}} : \frac{\overline{dp}}{\overline{pm}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} : \frac{1-\beta}{\beta} = W_i$$

上述两个比值之比就是直线上 4 个点 d_i, m, n, p 的交比。由此可以得出权因子的几何意义: 权因子 W_i 等于过控制顶点 d_i 的一条直线上分别具有权因子 $W_i = +\infty, 0, 1$ 和 $W_i \neq 0, 1$ 那四个点 d_i, m, n, p 的交比。

3　三次有理 B 样条曲线的几何特性

三次均匀有理 B 样条曲线的表达式为

$$WP(u) = 1/6[u^3\ u^2\ u\ 1]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_0V_0 \\ W_1V_1 \\ W_2V_2 \\ W_3V_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其首、末点的位置和切矢可分别表示为:

$$P_0 = P(0) = \frac{W_0V_0 + 4W_1V_1 + W_2V_2}{W_0 + 4W_1 + W_2}$$

$$P_1 = P(1) = \frac{W_1V_1 + 4W_2V_2 + W_3V_3}{W_1 + 4W_2 + W_3}$$

$$P_0' = P'(0) = \frac{6(2W_1 + W_2)}{W_0 + 4W_1 + W_2} \cdot \left(\frac{2W_1V_1 + W_2V_2}{2W_1 + W_2} - \frac{W_0V_0 + 4W_1V_1 + W_2V_2}{W_0 + 4W_1 + W_2}\right)$$

$$P_1' = P'(1) = \frac{6(2W_2 + W_3)}{W_1 + 4W_2 + W_3} \cdot \left(\frac{2W_2V_2 + W_3V_3}{2W_2 + W_3} - \frac{W_1V_1 + 4W_2V_2 + W_3V_3}{W_1 + 4W_2 + W_3}\right) \quad (2)$$

为了直观地表达三次均匀有理 B 样条曲线段的端点位置及其切矢方向, 可用图 2 所示的图解法。图中的符号 ⊕表示加权平均, 如

$$P_0 \oplus 2P_1 = \frac{W_0P_0 + 2W_1P_1}{W_0 + 2W_1}$$

其中 W_0, W_1, W_2, W_3 为权因子。

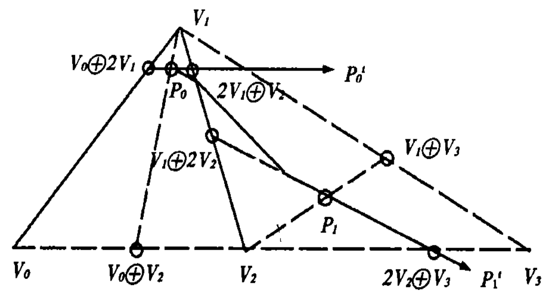

Fig. 2　Graphical method of the extremal vector and tangent vector of B-spline curve

三次有理 B 样条曲线的不变量为

$$\begin{cases} \dfrac{(W_0 + 4W_1 + W_2)(W_1 + 2W_2)}{2(W_1 + W_2)^2} = \dfrac{\overline{W_0}\,\overline{W_2}}{\overline{W_1}^2} = C_1 \\[2ex] \dfrac{(W_1 + 4W_2 + W_3)(2W_1 + 2W_2)}{2(W_1 + 2W_2)^2} = \dfrac{\overline{W_1}\,\overline{W_3}}{\overline{W_2}^2} = C_2 \end{cases}$$

式中 $\overline{W_i}(i = 0, 1, 2, 3)$ 为转化为有理三次 Bezier 曲线后的权因子。不变量的存在为曲线、曲面的设计提供了新的手段, 可以改变权因子的比率, 而不改变曲线曲面的形状, 这对曲线曲面的连续性要求有重要的意义。

4　权因子对曲线的形状控制

对于三次均匀有理 B 样条曲线, 可以通过改变顶点权因子的方法来调整其形状。改变一个权因子, 仅三段曲线受影响。当改变顶点 V_j 的权因子 W_j 时, 为保持曲线其余部分不变, 应以相同比例改变权因子 $W_i(i > j)$ 或权因子 $W_k(k > j)$。

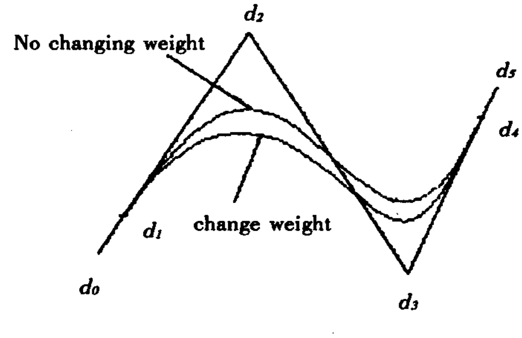

Fig. 3　Shape control of the curve ($W_0 = W_1 = W_2 = 0.2$; $W_3 = W_4 = W_5 = 0.5$)

改变两个顶点的权因子, 可更灵活的控制曲线端点的位置和切矢。三次有理 B 样条曲线段

端点的几何参数完全取决于相关的三个控制顶点及其权因子。设三个顶点分别为 V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, 则改变权因子 W_j 和 W_{j-1}(或 W_{j+1}), 并对 W_i($i < j-1$) 或($i > j+1$) 作相应的比例变化, 四段曲线将受影响如图 3。此时, 虽然对局部性没有改进, 但不必调整控制多边形。

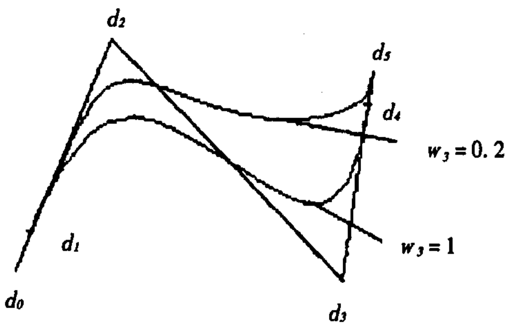

Fig. 4　Shape control of the curve ($W_3 = 0.2$ and $W_3 = 1$)

若 W_i 增加, 则曲线被拉向控制顶点 d_i; 若 W_i 减小, 则曲线被推离控制顶点 d_i。即权因子 W_i 的减小和增加起到了对曲线相对于顶点 d_i 的推拉作用。

若 W_i 增加, 则一般地曲线在受影响的范围内被推离除顶点 d_i 外的其它相应控制顶点; 若 W_i 减小, 则相反。如图 4。

分析了权因子对曲线的影响, 那么在实际的构造曲线的数学表示中, 我们可以按照所要求的曲线形状来确定权因子的值。例如各类圆锥曲线以及对于二次曲面的构造, 都能够确定出权因子来实现曲线曲面的连续性和光顺性。

5　结　　论

本文介绍了三次均匀有理 B 样条并分析了权因子的几何意义以及对曲线形状的影响。这对于灵活表达各类自由曲线的几何形状有了一种直观的认识和理解, 从而在特殊的曲线曲面构造中须确定权因子的方法上提供了一个有用的参考。

参考文献:

[1]　施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993.

[2]　朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3]　唐荣锡, 等. 计算机图形学教程[M]. 北京: 科学出版社, 1990.

[4]　安军, 刘桂雄, 范劲松. 基于新颖曲面测量技术下的自由曲面建模方法[J]. 华南理工大学学报, 1999, 27(9): 32- 35.

Effect of weight factor on B-spline curves

CHEN Jin-chang, LIANG Li-dong, LIU Gui-xiong, XIAO Yan

(South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract: By analysing geometrical meanings of the cubic rational B-spline weight factor, the paper presents a study of the geometrical characteristics of cubic rational B-spline curves. It also discusses the effect of the weight factor on the shape of B-spline curves, providing a way for constructing B-spline curves for special requirements.

Key words: B-spline; weight factors; shape control

作者简介: 陈锦昌(1956-), 男, 广东省南海人, 工学硕士, 华南理工大学教授, 主要从事计算机图形学、工程图学、CAD 等方面的研究。