

文章编号 1004 924X(2003)02 0166 05

空间曲率检测中的标定误差分析和标定方法

吴家麒, 杨东英, 钱晋武

(上海大学 机械自动化学院, 上海 200072)

摘要: 在分析空间曲线的曲率检测误差产生原因的基础上, 研究了标定方向空间曲率和检测方向信号的关系。在确定曲率分量和检测信号的关系之后, 提出了一种校正标定误差、提高空间曲率检测精度的方法, 并介绍了该方法的几何意义。该方法不仅可以用于空间曲率检测的标定工作, 也可适用其他一些空间矢量的检测工作。

关键词: 曲率检测; 空间曲线拟合; 标定误差; 标定方法

中图分类号: TB92 文献标识码: A

Calibration error analysis and way of calibration for spatial curvature measurement

WU Jia_qi, YANG Dong_ying, QIAN Jin_wu

(School of Electromechanical Engineering and Automation,
Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: The causes for spatial curvature measurement errors are analysed, and the relationship between the curvature in the direction of calibration and the signal in the direction of measurement is discussed. With a relevant formula established, a new method is proposed for the correction of the calibration error. The geometric meaning of this method is then defined not only for measurement of spatial curvature, but also for inspection for some other spatial vectors.

Key words: curvature measuring; 3D curve fitting; calibration error; calibration method

1 问题的提出

根据离散点的位置信息进行整条曲线的拟合, 已经有很多成熟的方法^[1,2]。但是在某些场合, 离散点的位置信息不易获得, 而离散点的曲率信息较易测试, 因此可以根据离散点的曲率信息进行曲线的拟合。对于平面曲线而言, 只须测得所在平面上的曲率, 就可以经过对曲线曲率和曲线方向的积分, 得到平面曲线的位置表达式^[3,4]。

对于空间曲线而言, 就需测得离散点上两个方向(一般是两个正交方向)上的曲率, 然后引进

运动坐标系和密切平面, 在运动坐标系和密切平面中进行曲线位置分析和坐标系的递推, 从而确定整条空间曲线的位置表达式。

在实际测量过程中, 由于曲线载体(比如内窥镜镜体)的材料蠕变, 以及测量传感器的不稳定, 会产生程度不等的曲率检测误差。为了减小这类误差, 可以利用 A/D 转换器对传感器输出信号进行线性化处理^[5]; 另一有效方法是经常进行曲率检测传感器的标定, 用于建立现时的曲线曲率和曲率检测传感器的检测信号(比如电压信号)之间的对应关系。

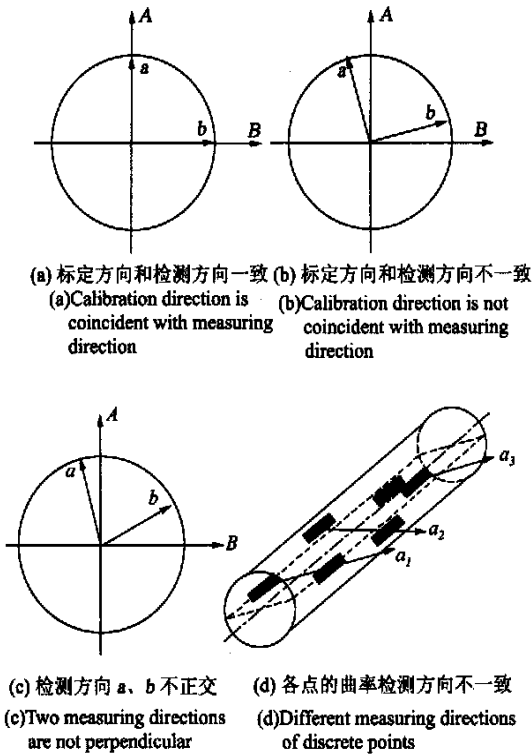


图 1 曲率检测中的标定方向与检测方向

Fig. 1 Calibration direction and measuring direction for curvature measurement

在理想的情况下,两个曲率标定方向 A 和 B , 与两个曲率检测方向 a 和 b 完全一致,如图 1(a) 所示。也就是说,当进行 A 向曲率标定时,仅仅在与其对应的曲率检测传感器 a 中有信号输出,而正交方向上的曲率检测传感器 b 中信号为 0;而当进行 B 向曲率标定时,仅仅在与其对应的曲率检测传感器 b 中有信号输出,而正交方向上的曲率检测传感器 a 中无信号。

在实际标定过程中,很难达到理想情况,而产生标定误差。产生标定误差的原因有以下几点:

(1) 由于两个曲率标定方向 A 和 B , 与两个曲率检测方向 a 和 b 不一致,当进行 A 向曲率标定时,不仅在与其对应的曲率检测传感器 a 中有信号输出,在与其正交方向上的曲率检测传感器 b 中也有信号;在进行 B 向曲率标定时,情况亦然,见图 1(b)。换言之,传感器 a 中信号 u_a , 不仅对标定方向 A 上的曲线弯曲有影响,对标定方向 B 上的曲线弯曲也有影响;当然传感器 b 中信号 u_b , 不仅对标定方向 B 上的曲线弯曲有影响,对标定方向 A 上的曲线弯曲也有影响。这种现象,暂且

称之为曲率检测信号的耦合现象;

(2) 由于曲率检测传感器的安装误差,或者由于曲线载体材料的蠕变,使得曲率检测方向 a 和曲率检测方向 b 不垂直,见图 1(c)。这种曲率检测方向的不垂直,同样会产生曲率检测信号的耦合;

(3) 同样,由于曲率检测传感器的安装误差,或者由于曲线载体材料的蠕变,会使得各个离散点的曲率检测方向不一致。如图 1(d) 所示,相邻 3 点的 3 个曲率检测方向 a_1, a_2, a_3 不共面。在这种情况下,即使设法让起始点处的曲率标定方向和曲率检测方向保持一致,也不能确保后续各点上曲率标定方向和曲率检测方向的一致。

由于这些原因,导致了在传感器标定过程中引入了不可忽视的误差,影响了空间曲线的拟合精度。

2 标定方向上的空间曲率和检测方向上信号的关系

在平面曲线的曲率标定工作中,将曲线弯成一定的曲率 k , 然后以某种手段测得曲线载体上纵向线应变所对应的信号(比如电压信号) u , 由于测量电压与纵向线应变之间有线性关系,纵向线应变与曲线曲率之间又有正比关系^[3], 因此可将测量信号和曲率之间的关系写成线性表达式:

$$u = c_1 \times k + c_2, \quad (1)$$

式(1)也可以写成如下形式:

$$k = c_3 \times u + c_4, \quad (2)$$

现在的问题是,在空间曲线的曲率标定工作中,测量信号和曲率之间有这样的关系。

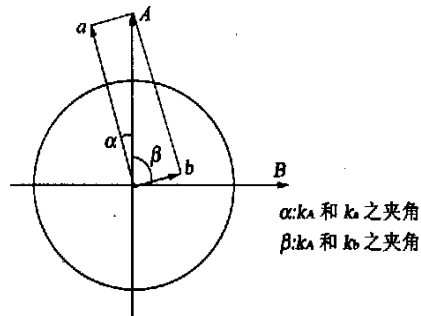


图 2 标定曲率 k_A 和测量曲率 k_a, k_b 的关系

Fig. 2 Relationship between k_A, k_a and k_b

显然,曲率测量方向 a 上的测量信号 u_a 和该方向上的曲率 k_a 的线性关系依然存在,同样曲率测量方向 b 上的测量信号 u_b 和该方向上的曲率 k_b 的线性关系也存在:

$$\begin{cases} k_a = c_5 \times u_a + c_6 \\ k_b = c_7 \times u_b + c_8 \end{cases}, \quad (3)$$

如图 2 所示,标定方向上的曲率 k_A 是两个测量方向上的曲率 k_a 和 k_b 的合成矢量。如果 k_a 和 k_b 正交,那么他们的模有如下关系:

$$k_A = \text{Sqrt}(k_a^2 + k_b^2), \quad (4)$$

如果 k_a 和 k_b 不垂直,那么 k_A 、 k_a 、 k_b 三者的模可以用下式表达:

$$k_A / \sin(180 - \alpha - \beta) = k_a / \sin \beta = k_b / \sin \alpha, \quad (5)$$

无论是式(4)还是式(5), k_A 的模和 k_a 、 k_b 的模之间并不是线性关系。不过在标定之后,在实际测量过程中 k_A 和 k_a 、 k_b 之间的夹角 α 、 β 不再改变,相应的正弦值可以看作常数。这样就可以从式(5)导出两个线性关系式:

$$\begin{cases} k_A = \sin(180 - \alpha - \beta) / \sin \beta \times k_a = c_9 \times k_a \\ k_A = \sin(180 - \alpha - \beta) / \sin \alpha \times k_b = c_{10} \times k_b \end{cases}, \quad (6)$$

现将式(3)中的 k_a 、 k_b 表达式代入式(6),并将式(6)两个式子相加,经简化得到 A 方向的曲率 k_A 和测量信号 u_a 、 u_b 之间的关系式:

$$k_A = a_1 \times u_a + a_2 \times u_b + a_3, \quad (7)$$

同样也可以得到 B 方向的曲率 k_B 和测量信号 u_a 、 u_b 之间的关系式:

$$k_B = b_1 \times u_a + b_2 \times u_b + b_3, \quad (8)$$

从式(7)和式(8)中可见,经过标定之后, A 方向的曲率 k_A 和 B 方向的曲率 k_B ,与测量信号 u_a 、 u_b 之间依然具有线性关系。

实际上,式(7)和式(8)不仅能从式(5)导出,也可以用下述方法推出。以 A 方向的曲率 k_A 为例,如图 2 所示,虽然 a 、 b 两个方向不一定正交,但是下式依然成立:

$$k_A = k_a \times \cos \alpha + k_b \times \cos \beta, \quad (9)$$

然后将式(3)中的 k_a 、 k_b 表达式代入式(9),考虑到在标定之后夹角 α 和 β 不再改变,因此也可以得到线性关系式(7)。至于式(8),也可以用这一方法推出。

3 校正标定误差的方法

找出标定误差的来源,分析标定方向上的空间曲率和检测方向上的信号的关系,目的是为了找到校正标定误差的方法。比较容易想到的方法就是提高相关工作的精确度。

3.1 方法之一——提高测量传感器的安装精度和标定精度

所谓提高标定精度,是指尽可能正确地给出曲线曲率的值,和尽可能使标定方向 A、B 和曲率的测量方向 a 、 b 一致。

所谓提高安装精度,是指尽可能使曲率的两个测量方向 a 、 b 保持正交,指尽可能使各个离散点上的曲率测量方向能够共面。

这些措施对安装工艺、标定工艺提出了比较高的要求。实际上,提高工艺精度也只能做到尽可能减少误差,并不能完全消除误差。这虽然是比较容易想到的方法,但也是比较难以做到的方法。

尤其是这个方法不能消除因为材料蠕变而导致的两个测量方向 a 、 b 不垂直而引起的误差,这个方法也不能消除因为各离散点上测量方向的不共面而引起的误差。

3.2 方法之二——根据标定曲率和检测信号之间的关系推算空间曲率

在进行曲率与检测信号之间的关系分析时,已经得到了 A 方向的曲率 k_A 和测量信号 u_a 、 u_b 之间的关系式,以及 B 方向的曲率 k_B 和测量信号 u_a 、 u_b 之间的关系式(7)和(8)。

只要在标定曲率时,确定这两个关系式中的系数 a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 ,就可以确定这两个关系式。那么实际测量时,一旦得到信号 u_a 、 u_b ,则曲率 k_A 和 k_B 的值可以计算得到。

以式(7)中的 k_A 的表达式为例,为了确定系数 a_1 、 a_2 、 a_3 ,只需在标定时给出三个 k_A 的值,测出相应的三对 u_a 、 u_b 值,代入式(7)可以得到三个方程组成的线性方程组:

$$\begin{cases} k_{A_1} = a_1 \times u_{a_1} + a_2 \times u_{b_1} + a_3 \\ k_{A_2} = a_1 \times u_{a_2} + a_2 \times u_{b_2} + a_3 \\ k_{A_3} = a_1 \times u_{a_3} + a_2 \times u_{b_3} + a_3 \end{cases}, \quad (10)$$

从中可以解得系数 a_1 、 a_2 、 a_3 ,从而确定式(7)。

由于曲率测量传感器的不稳定性, 为了提高标定的精度, 可以多给出一些 k_A 的值 (比如 n 个), 并测出相应的 u_a, u_b 值, 代入式(7)可以得到 n 个方程组成的线性方程组:

$$k_{Ai} = a_1 \times u_{ai} + a_2 \times u_{bi} + a_3 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

由于方程数多于系数个数, 因此 a_1, a_2, a_3 的值不能直接求解, 但可以采用最小二乘法等数值计算方法求得 a_1, a_2, a_3 的值^[5], 并确定式(7)。

式(8)可以用相同的方法确定。

这一方法的推导过程中, 并未以检测方向与标定方向的一致为先决条件, 也未以两个检测方向的正交为先决条件。因此用这一方法得到的曲率值中, 不再有因为检测方向 a, b 与标定方向 A, B 的不一致所引起的误差, 也不再有因为两个检测方向 a, b 的不正交所引起的误差。

3.3 式(7)与式(8)的几何意义

式(7)或式(8)的几何意义是三维空间里的平面。仍然以式(7)中的 k_A 的表达式为例, 在 a_1, a_2, a_3 的值确定以后, 这是一个以 u_a, u_b 为参数的线性表达式, 它代表了三维空间 (k_A, u_a, u_b) 中的一个平面, 如图 3 所示。

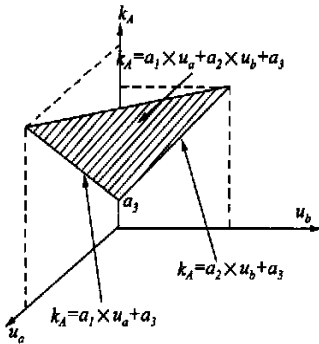


图 3 式(7)的几何意义

Fig. 3 Geometric meaning of formula (7)

k_A 所代表的平面如图中阴影线所示; k_A 平面与坐标面 $u_b = 0$ 的交线就是直线 $k_A = a_1 \times u_a + a_3$; k_A 平面与坐标面 $u_a = 0$ 的交线就是直线 $k_A = a_2 \times u_b + a_3$; a_3 可以看作 $u_a = 0$ 和 $u_b = 0$ 即零电位时的初始曲率。

如果在标定时用三点 $(k_{Ai}, u_{ai}, u_{bi}, i = 1, 2, 3)$ 来确定式(7), 那么毫无疑问, 这三点都在这个平面上, 实际测量时根据 u_a, u_b 的测量值按式

(7)解算 k_A 得到的点, 当然也在这个平面上。

如果在标定时用三个以上的点 $(k_{Ai}, u_{ai}, u_{bi}, i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 来确定式(7), 那么由于测量误差的原因, 这 n 个点的位置虽然接近一个平面, 但实际不共面, 也就不可能都在式(7)所代表的平面上。但是求解 a_1, a_2, a_3 时所采用的数值计算方法, 应该确保这 n 个点与式(7)所代表的平面的距离的某种统计值最小 (比如平方和最小、均方根最小)。不过实际测量时根据 u_a, u_b 的测量值按式(7)解算 k_A 得到的点, 仍然是在这个平面上的。

式(8)的几何意义和式(7)类似, 不再赘述。

4 算 例

现在以一根空间曲线为例来说明上述方法的原理和使用步骤。在该曲线上取 8 个采样点, 各点处标定方向 k_A 和测量方向 k_a 之间的夹角 α , 以及 k_A 和测量方向 k_b 之间的夹角 β 分别为:

$$\alpha = \{0.0, 0.0, 5.0, 5.0, 15.0, 15.0, 30.0, 30.0\}$$

$$\beta = \{90.0, 90.0, 85.0, 85.0, 70.0, 70.0, 70.0, 70.0\}$$

在 k_A 标定工作中, 为每个采样点给定三组曲率 $k_{A_{10}} = 0.1$ 和 $k_{B_{10}} = 0, k_{A_{30}} = 0.033$ 和 $k_{B_{30}} = 0, k_{A_{50}} = 0.02$ 和 $k_{B_{50}} = 0$, 相对应的测量信号为 $\{u_{a_{10}}\}, \{u_{b_{10}}\}, \{u_{a_{30}}\}, \{u_{b_{30}}\}, \{u_{a_{50}}\}, \{u_{b_{50}}\}$ (具体数据从略), 由此可以计算得到式(7)中的系数 a_1, a_2, a_3 :

$$a_1 = \{1.2, 1.2, 1.195, 1.195, 1.159, 1.159, 1.039, 1.039\}$$

$$a_2 = \{0, 0, .07, .07, .274, .274, .274, .274\}$$

$$a_3 = \{.5, .5, .524, .524, .586, .586, .536, .536\}$$

从而确定每个采样点上的式(7)。

同样在 k_B 标定工作中, 为每个采样点给定三组曲率 $k_{A_{10}}$ 和 $k_{B_{10}} = 0.1, k_{A_{30}} = 0$ 和 $k_{B_{30}} = 0.033, k_{A_{50}} = 0$ 和 $k_{B_{50}} = 0.02$, 相对应的测量信号为 $\{u_{a_{10}}\}, \{u_{b_{10}}\}, \{u_{a_{30}}\}, \{u_{b_{30}}\}, \{u_{a_{50}}\}, \{u_{b_{50}}\}$ (具体数据从略), 由此可以计算得到式(8)中的系数 b_1, b_2, b_3 :

$$b_1 = \{0, 0, -.105, -.105, -.311, -.311, -.6, -.6\}$$

$$b_2 = \{.8, .8, .797, .797, .752, .752, .752, .752\}$$

$$b_3 = \{.3, .3, .255, .255, .152, .152, .032, .032\}$$

从而确定每个采样点上的式(8)。

完成定标之后, 在 8 个采样点上取得信号:

$$u_a = \{-.412\ 3, -.374\ 5, -.356\ 5, -.341\ 7,$$

$$-.347\ 9, -.354, -.369, -.387\ 5\}$$

$$u_b = \{-.187\ 6, -.218\ 5, -.255\ 2, -.307\ 4,$$

$$[-.338\ 2, -.379\ 9, -.388\ 2, -.403\ 6]$$

可将 u_a 和 u_b 代入式(7)、(8),从而算得曲率:

$$k_A = [.005\ 2, .050\ 6, .080\ 1, .094\ 2,$$

$$.090\ 1, .071\ 6, .046\ 3, .022\ 8]$$

$$k_B = [.149\ 9, .125\ 2, .089, .045\ 9,$$

$$.005\ 8, -.023\ 6, -.038\ 6, -.039]$$

根据该曲率,可以拟合出预期的变径螺旋线,如图 4 所示。

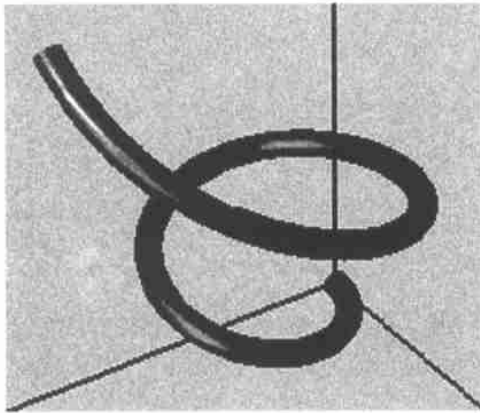


图 4 变径螺旋线

Fig. 4 Reconstruction of radius-changing helix

5 结 论

本文所介绍的方法是在分析曲率与检测信号

之间关系的基础上确立的,它的理论依据实际上是空间曲线的曲率可以作为矢量进行合成和分解。一个实际存在的曲率矢量 k ,既可以按照标定方向 A 、 B 来进行分解,也可以按照曲率测量方向 a 、 b 来进行分解。

但是这个方法并不去直接求解分解以后的曲率分矢量,而是绕过了分矢量求解这一困难,仅仅以曲率矢量的合成分解为基础建立了曲率与检测信号之间的线性关系式。并且把检测方向 A 、 B 与标定方向 a 、 b 的不一致引起的误差和两个检测方向 a 、 b 的不正交所引起的误差统统归进了系数 a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 之中,经过标定工作确定了六个系数,校正相应的误差。

至于各个离散点的曲率检测方向不共面所引起的误差,由于在这个方法中是对各个离散点分别进行标定,也就是说,各个离散点上可以有不同的系数 a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 ,对应着各个离散点上不同的曲率检测方向,因此自然而然地解决了这个问题。

这个方法虽然是在解决曲率检测的标定工作中提出的,但是这个方法具有一定的普遍性。在其他空间矢量的检测工作中,只要检测信号和相关物理量之间具有线性关系,这个方法所采用的思路和原理是适用的。

参考文献:

- [1] 孙家广. 计算机图形学[M]. 北京:清华大学出版社,1998.
SUN J G. *Computer graphics* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998. (in Chinese)
- [2] 齐涤非,杨劲松,刘国淦,等. 应用 NURBS 实现飞机叶片的三维重构[J]. 光学 精密工程,2001,9(3),223-225.
QI D F, YANG J S, LIU G G, et al. 3D Reconstruction of aircraft blades with NURBS[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2002,9(3), 223-225. (in Chinese)
- [3] 杨东英,吴家麒,沈林勇,等. 基于曲率数据的曲线拟合方法研究[J]. 应用科学学报,2003,3.
YANG D Y, WU J Q, SHEN L Y, et al. Research of Curve fitting Based on Curvature Data[J]. *Journal of applied science*, 2003.3. (in Chinese)
- [4] 向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京:人民教育出版社,1981.
XIANG M, HUANG J ZH. *Differential Geometry* [M]. Beijing: People's Education Press, 1981. (in Chinese)
- [5] 刘光达. 电桥应变传感器信号线性的修正方法[J]. 光学 精密工程,1998,6(2):95-99.
LIU G D. Bridge elastic signal linearization by way of A/D convertor[J]. *Optics and Precision Engineering*, 1998,6(2): 95-99.
- [6] 邓建中. 计算方法[M]. 西安:西安交通大学出版社,2001.
DENG J ZH. *Computational method* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001. (in Chinese)

作者简介:吴家麒(1949-),男,上海人,副教授,研究方向为精密机械和计算机图形学;

杨东英(1979-),女,上海人,硕士研究生,专业方向为机械电子工程;

钱晋武(1962-),男,浙江人,教授,博士生导师,研究方向为机器人和微机械技术。