

文章编号 1004-924X(2026)18-2792-17

偏振双向反射分布函数的物理约束重建方法

李庚鹏, 蔡 伟*, 杨志勇, 王晓伟, 王月圆
(火箭军工程大学, 陕西 西安 710025)

摘要:针对偏振双向反射分布函数数据库中,测量数据在插值重建时精度不足且易违反物理约束,从而降低偏振渲染结果准确性与可信度的问题,提出一种面向偏振渲染的 pBRDF 物理约束重建方法。首先,将 pBRDF 数据映射至圆柱坐标空间,以消除参数奇异性和边界不连续性;其次,通过基于周期性距离度量的局部线性插值方法获得初始穆勒矩阵,并依次施加互易性对称化、Cloude 半正定特征值截断及能量守恒投影,保证重建结果满足物理可实现性;最后,将重建数据嵌入偏振光线追踪流程进行渲染验证。基于 KAIST 数据集的实验结果表明,该方法将单材质数据存储规模由 912 MB 压缩至 650 MB;在 Gold 和 Purple Silicone 材质上均实现了零物理违反率;与 TD 方法相比,Gold 材质的偏振度与偏振角图像 SSIM 值分别提高 4.3% 和 4.5%,Purple Silicone 材质分别提高 0.8% 和 5.0%。该方法兼顾了重建精度、物理正确性和存储效率,可为 pBRDF 测量数据的高精度重建与真实感偏振渲染提供有效支撑。

关键词:偏振双向反射分布函数;穆勒矩阵;圆柱坐标表示;物理约束插值;偏振渲染

中图分类号:TP391.9 **文献标识码:**A

doi:10.3724/OPE.20263418.2792 **CSTR:**32169.14.OPE.20263418.2792

Physics-constrained reconstruction method of polarized bidirectional reflectance distribution function

LI Gengpeng, CAI Wei*, YANG Zhiyong, WANG Xiaowei, WANG Yueyuan

(Rocket Force Engineering University, Xi'an 710025, China)

* Corresponding author, E-mail: XHYU807@outlook.com

Abstract: To address the issues of insufficient accuracy and frequent violations of physical constraints during the interpolation and reconstruction of measured data in Polarized Bidirectional Reflectance Distribution Function (pBRDF) databases—which previously degraded the accuracy and credibility of polarization rendering results—this paper proposed a physics-constrained pBRDF reconstruction method tailored for polarization rendering. First, the pBRDF data was mapped into cylindrical coordinates to eliminate parameter singularities and boundary discontinuities. Second, an initial Mueller matrix was obtained via a local linear interpolation method based on periodic distance metrics. Subsequently, reciprocity symmetrization, Cloude semi-definite eigenvalue truncation, and energy conservation projection were applied sequentially to ensure the physical realizability of the reconstructed results. Finally, the reconstructed data was integrated into a polarized ray tracing pipeline for rendering validation. Experimental results based on the KAIST dataset demonstrate that the proposed method reduces the storage size of single-material data from 912 MB

收稿日期:2026-06-12;修订日期:2026-08-01.

基金项目:基于偏振光线跟踪的典型目标可见光偏振成像仿真技术(No. MIITECKT25104)

to 650 MB. It achieves a zero physical violation rate for both Gold and Purple Silicone materials. Compared with the TD method, the proposed approach improves the SSIM of the Degree of Polarization images for Gold and Purple Silicone materials by 4.3% and 0.8%, respectively, and the SSIM of the Angle of Polarization images by 4.5% and 5.0%, respectively. By balancing reconstruction accuracy, physical correctness, and storage efficiency, this method provides effective support for the high-precision reconstruction of pBRDF measurement data and realistic polarization rendering.

Key words: polarization bidirectional reflectance distribution function; mueller matrix; cylindrical coordinate representation; physically constrained interpolation; polarization rendering

1 引言

光的偏振态作为光波的基本属性,为物质表面光学特性量化提供了不可或缺的维度信息^[1]。在光与物质的相互作用中,偏振双向反射分布函数(polarized Bidirectional Reflectance Distribution Function, pBRDF)完整刻画了入射光与出射光的偏振态变换关系,其核心由穆勒矩阵予以表征^[2]。随着计算能力的飞跃与物理渲染技术的日益成熟,pBRDF在诸多前沿领域展现出巨大的应用潜力,例如高保真度的图像合成、复杂背景下的目标识别与材质分类,以及基于偏振遥感信息的表面物理参数反演^[3-7]。

在pBRDF建模方面,已有研究从不同角度对材料表面的偏振反射特性展开了深入探索。邹宏扬等^[8]基于二向偏振分布函数修正方法,分析了机场典型地物材质在可见光波段的偏振特性,揭示了材料表面状态对偏振反射分布的影响规律;刘承麟等^[9]针对微面元模型中遮蔽效应的描述不足,引入改进型Blinn遮蔽函数,提升了目标材料表面偏振反射模拟的精度。上述工作在偏振反射物理建模方面取得了重要进展。尽管物理解析类pBRDF模型(如各类微面元理论模型)具备无需海量存储的优势,但通过实际测量获取的pBRDF数据库,因其能够精确捕捉材料在实际条件下的复杂散射行为,在真实感偏振渲染与物理模型验证方面具有不可替代的价值^[10-16]。目前最具代表性的公开pBRDF数据库由韩国科学技术院(Korea Advanced Institute of Science and Technology, KAIST)2023年发布,涵盖25种室内材料的测量数据。该数据库基于Rusinkiewicz参数化在笛卡尔网格上对 $91 \times 181 \times 91$ 组几何构型进行离散采样,单材质数据

量高达约912 MB,已成为pBRDF建模与验证的主流基准^[17-18]。2025年,Moon等人进一步将维度扩展至光谱域,提出首个真实世界材料的高光谱偏振BRDF数据集^[19],但也使得采集与存储开销进一步剧增。上述数据库受探测器动态范围、环境杂散光、标定误差等因素影响,即使是权威数据集也存在一定比例的非物理穆勒矩阵。此外,该数据库所采用的插值重建协议本身也存在着周期性边界跳变、近法向方位角退化奇异性及显著的非物理几何冗余等问题。

在偏振渲染中,对未直接测量的几何位置,需通过插值完成pBRDF重建。传统方法常将pBRDF数据集中的 4×4 穆勒矩阵元素视为独立标量场,在笛卡尔坐标Rusinkiewicz参数化网格上进行线性插值。然而,此类插值协议忽略了穆勒矩阵各元素间固有的强耦合物理约束(如能量守恒、互易性和Cloude半正定性),因此独立插值极易破坏能量守恒、互易性及Cloude半正定性这些约束,产生负特征值或能量不守恒等非物理解。在偏振光学领域,Devlaminck通过分析欧几里得与对数-欧几里得两种插值方法,阐明了其各自对应的物理模型,为穆勒矩阵的平均与插值操作奠定了物理解释框架^[20]。在pBRDF建模与偏振渲染的特定应用中,插值研究主要分为三类:第一类通过重要性采样提升渲染效率,但未解决参数空间的奇异性问题^[21];第二类针对实时渲染设计快速插值核,但完全未引入物理约束^[22];第三类提出物理约束插值方案,如基于Cloude相干矩阵三重简并(Triple Degeneracy, TD)假设的插值方法^[23],该方法通过对特征谱的插值保证输出穆勒矩阵的物理可实现性。当前方法普遍沿用笛卡尔坐标参数化,未能同时解决参数奇异性与周期性边界问题,且TD假设对一

般材料(特别是低退偏特性的金属材质)的适用性有限。近年来 PolGS++^[24], NeISF^[25] 等神经隐式表示方法尝试学习连续偏振反射场,但依赖大量训练数据且物理约束嵌入较为复杂。

针对上述不足,本文提出一种基于圆柱坐标表示与物理约束插值的 pBRDF 优化重建方法,基于圆柱坐标的参数空间映射方法,可避免周期性边界退化、参数奇异性等导致的插值失效问题;基于物理约束投影方法则确保插值输出的穆勒矩阵严格满足物理约束;高精度重建的偏振数据可实现偏振渲染图像生成。本文面向离散测量 pBRDF 数据在未采样几何方向上的重建问题,提出一种结合圆柱坐标参数化、局部插值及物理约束投影的重建方法,并从重建误差、物理可实现性、存储开销和偏振渲染结果等方面验证其有效性。

2 pBRDF 数据集及其物理约束

2.1 pBRDF 数据集

pBRDF 的经验性测量最早可追溯至单角度或少量几何配置的偏振反射率测定^[11-12]。随着自动测角仪与偏振相机的发展,系统性大规模采集成为可能。

Rusinkiewicz 参数化是一种广泛应用于各向同性表面反射建模的方法。与传统的天顶角、方位角参数化不同,它使用半角方向与差角方向共三个角度来描述光线的几何反射。图 1 展示了

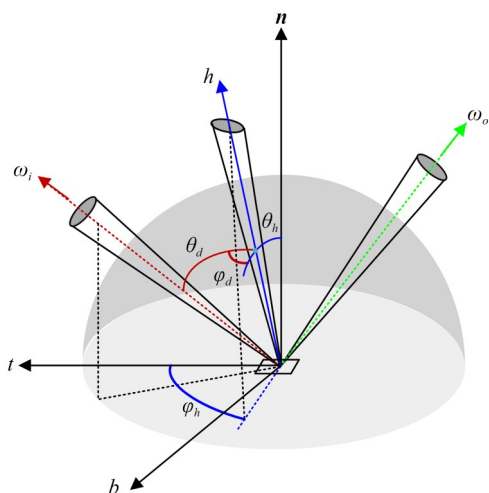


图 1 Rusinkiewicz 参数化示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Rusinkiewicz parameterization

Rusinkiewicz 参数化下的局部坐标系与散射几何关系。其中, $\mathbf{n}$ 为表面法向量; $\mathbf{t}$ 为切向量, $\mathbf{b}$ 为副法向量; ω_i 和 ω_o 分别为入射光向量与反射光向量。Rusinkiewicz 坐标将 ω_i 和 ω_o 的复杂几何关系, 重构为以半程向量 $\mathbf{h}$ 为基准的变量:

$$\mathbf{h} = \frac{\omega_i + \omega_o}{\|\omega_i + \omega_o\|}. \quad (1)$$

表面法线与半程向量之间的夹角 $\theta_h = \arccos(\mathbf{h} \cdot \mathbf{n})$, 描述了特定的散射几何形状如何偏离镜面反射。 ϕ_h 将散射几何相对于各向异性轴 $\mathbf{t}$ 进行定向。对于各向同性表面, pBRDF 对 ϕ_h 具有不变性, 从而将函数依赖的变量从四个减少到三个。微面元入射角 $\theta_d = \arccos(\omega_i \cdot \mathbf{h}) = \arccos(\omega_o \cdot \mathbf{h})$, 可以理解为入射光与微表面法线的夹角。最后, 方位差角 $\phi_d = \text{atan2}(\omega_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{h}))$, 描述了散射几何形状偏离“面内”散射的程度。

pBRDF 数据库基于 Rusinkiewicz 坐标系在三维笛卡尔网格 $(\theta_d, \phi_d, \theta_h)$ 上存储数据, 提供离散采样的穆勒矩阵测量值。这种表示方法的问题在于: (1) 周期性处理不当。 ϕ_d 具有周期性, 但笛卡尔网格在边界处不连续, 导致插值在 $\pm 180^\circ$ 附近产生明显的伪影, 破坏了数据的平滑性; (2) 边界退化问题。当 $\theta_d = 0$ 时, ϕ_d 的定义退化, 导致参数空间在该区域存在奇异性。这种奇异性给插值和数据分析带来了额外的复杂性; (3) 非物理几何冗余。大量网格点对应 $\cos \theta_i < 0$ 或 $\cos \theta_o < 0$ 的非物理散射几何(即光线从表面下方入射), 但这些无效点仍占用存储空间并参与插值计算, 干扰邻近有效采样点的权重分配, 导致插值误差的增大。

2.2 穆勒矩阵物理可实现性判据

材料表面对入射偏振光的调制作用可由 Mueller 矩阵表示。对于 Stokes 矢量 $\mathbf{S}_o = [S_0, S_1, S_2, S_3]^T$, 其传播过程可表示为 $\mathbf{S}_o = \mathbf{M} \mathbf{S}_i$ 。其中, $\mathbf{M}$ 为 4×4 实值 Mueller 矩阵, 分别表示入射和出射 Stokes 矢量。然而, 并非所有数学意义上的实值矩阵都能够由真实的光学系统产生。因此, 需要对 Mueller 矩阵进行物理可实现性判断。本文采用 Cloude 相干矩阵半正定性作为单个 Mueller 矩阵偏振物理可实现性的判据, 并在相应材料假设下满足 Mueller pBRDF 的能量守恒性和互易性。

一个物理的穆勒矩阵必须满足以下约束条件:(1)能量守恒约束。对于反射过程,Mueller矩阵的 M_{00} 分量描述非偏振入射光的总强度反射响应。在归一化条件下,反射率不应超过允许范围,即矩阵的(1,1)元素满足 $0 \leq M_{00} \leq 1$,表示反射率不超过1。对于实际pBRDF数据,还应结合入射方向和出射方向的几何余弦因子,对出射半球上的反射能量进行积分检验。固定入射方向 ω_i , M_{00} 满足: $\int_{\Omega^+} M_{00}(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_o d\omega_o \leq 1$ 。 Ω^+ 表示表面上方的出射半球,该约束保证反射过程不会产生额外能量,符合无源光学系统的能量守恒要求。(2)互易性约束:对于线性、时不变且不存在显著磁光非互易效应的材料,其Mueller pBRDF应满足光学互易性: $M = DM^T D$,其中 $D = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ 。这一原理反映了光学系统的时间反演对称性,可以通过对矩阵施加互易性投影进行修正。互易性约束主要限制Mueller矩阵的结构对称性,并不能单独保证矩阵具有物理可实现性。因此,还需要进一步检验其对应相干矩阵的半正定性。(3)Cloude相干矩阵半正定约束。为建立Mueller矩阵与物理可实现性之间的数学联系,采用Pauli矩阵 σ 作为基,将Mueller矩阵映射为Cloude相干矩阵 $H(M)$,以相干矩阵的最小特征值作为物理性判据;当存在小于数值容差的负特征值时,将负特征值截断为零,并利用修正后的特征谱重构相干矩阵,最后通过逆映射得到满足半正定约束的Mueller矩阵:

$$H(M) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 m_{ij} (\sigma_i \otimes \sigma_j^*), \quad (2)$$

其中: $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 。 $\otimes$ 表示克罗内克积, m_{ij} 为穆勒矩阵的第 (i,j) 个元素。该映射建立了穆勒矩阵与相干矩阵之间的等价关系。由任意穆勒矩阵通过上式构造的 $H(M)$ 均为厄密矩阵,对其进行特征值分解可得 $H = U \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) U^H$ 。其中, U 为特征向量矩阵, U^H 表示其共轭转置, λ_i 为相干矩阵的特征值。相干矩阵 $H(M)$ 还可表示为各特征分量的加权和:

$$H(M) = \frac{1}{m_{00}} \sum_{i=1}^4 \lambda_i H_i, \quad (3)$$

其中: H_i 为非零本征值 λ_i 对应本征矢外积所重构的矩阵。由于 H_i 的秩为1,该分解实际上将原穆勒矩阵表示为至多4个无退偏穆勒矩阵之和。根据Cloude分解理论,这4个本征值必为实数,将其按降序排列后,包含了介质退偏特性的关键信息。物理可实现的穆勒矩阵必须满足半正定厄米矩阵条件,即要求所有本征值满足 $\lambda_i \geq 0$ 。这一约束是保障偏振系统物理可实现性的核心,也是传统穆勒矩阵插值方法最易违反的条件。基于此,可通过判定 $\min(\lambda_i) \geq 0$,来检验矩阵的物理合法性;若存在负本征值,则需实施物理修正,剔除负本征值(将其置零),并重新执行逆变换以合成合法的穆勒矩阵。此步骤消除了相干矩阵中的负特征值,使重构结果满足Cloude半正定约束,从而保证Mueller矩阵在偏振变换意义下具有物理可实现性。需要指出的是,该判据仅针对单个Mueller矩阵的偏振物理性,反射过程的能量守恒仍需通过 M_{00} 范围及pBRDF半球积分结果进行独立检验。

综上,Mueller矩阵的物理性判定定义为相干矩阵半正定性判定,并将其与互易性及能量守恒约束分别处理。互易性约束用于修正矩阵结构,Cloude半正定约束用于保证偏振变换的物理可实现性,能量守恒约束则用于限制反射过程中的能量增益。

为定量分析KAIST数据库中Mueller矩阵的偏振物理可实现性,按照式(3)将每个有效Mueller矩阵映射为Cloude相干矩阵,并计算其最小特征值。满足 $\lambda_{\min}[H(M)] \geq -\epsilon$ 的矩阵被判定为物理Mueller矩阵。物理Mueller矩阵占比定义为:

$$R_{\text{physical}} = \frac{N_{\text{physical}}}{N_{\text{valid}}} \times 100\%, \quad (4)$$

其中: N_{physical} 为满足 $\lambda_{\min}[H(M)] \geq -\epsilon$ 的矩阵数量。如图2所示,KAIST数据库中各材料的物理穆勒矩阵占比存在显著差异,仅根据Cloude相干矩阵半正定性统计,用于反映Mueller矩阵的偏振物理可实现性,不包含互易性和pBRDF半球积分能量守恒分析。

如图2所示,KAIST数据库中不同材料的物理Mueller矩阵占比存在明显差异。硅胶和漫反射板等材料具有较高的物理矩阵占比,而部分金

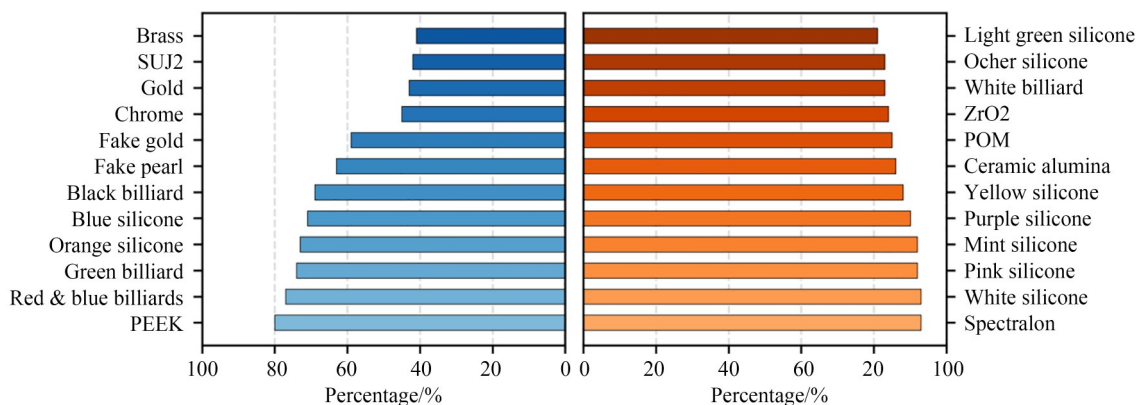


图2 KAIST 数据库中不同材料满足 Cloude 半正定判据的 Mueller 矩阵占比

Fig. 2 Proportion of Mueller matrices satisfying the Cloude positive-semidefinite criterion for different materials in the KAIST dataset

属材料的物理矩阵占比相对较低。这种差异可能与材料偏振响应、测量信号动态范围、信噪比及系统标定误差有关。

3 圆柱坐标表示与物理约束插值

3.1 圆柱坐标参数化及其逆变换

基于 $r = \theta_d$, $\phi = \phi_d$, $z = \theta_h$ 的圆柱坐标表示法构建了物理一致的插值流形。为消除差角方位维度的周期边界并统一表示反射几何, 本文将 Rusinkiewicz 参数映射至圆柱坐标: $x = \theta_d \cos \phi_d$, $y = \theta_d \sin \phi_d$, $z = \theta_h$ 。其中, $\theta_d \geq 0$ 为圆柱半径, $\phi_d \in (-\pi, \pi]$ 为方位角, θ_h 为轴向坐标。当 $\theta_d > 0$, 上述变换存在唯一逆映射: $\theta_d = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi_d = \arctan 2(y, x)$, $\theta_h = z$ 。当 $\theta_d = 0$ 时, ϕ_d 在几何上无定义, 所有方位索引均映射至同一圆柱轴位置 $(0, 0, \theta_h)$ 。如图 3 所示, 对比了 pBRDF 数据在笛卡尔坐标系与圆柱坐标系下的表示效果。通过映射, 原本在笛卡尔空间中因周期性而断裂的参数空间被重新映射为一个连续的圆柱面, 同时参数退化点被压缩为轴线, 从而消除了插值过程中的数值奇异性。这种表示法不仅降低了数据冗余, 更重要的是提高了参数空间的采样均匀性, 针对 $\theta_d \rightarrow 0$ 时, ϕ_d 的定义退化问题, 本文设计了如下处理策略: 当 $r = \theta_d < \epsilon$, 取 $\epsilon = \min(\theta_{d, \text{valid}})$, 其中 $\theta_{d, \text{valid}}$ 为有效物理采样点的微面元入射角, 实验中取值为 1.2° 。将该区域所有采样点映射为圆柱坐标的 z 轴上的同一点,

插值时不参与方位角维度的权重计算, 从而避免参数冗余引入的数值不稳定。 θ_d 越小, 方位角 ϕ_d 参数的冗余越严重。当 θ_d 趋近于 0° 时, ϕ_d 对应的几何意义完全退化, 参数冗余比例接近 100%。

pBRDF 数据的有效反射区域由光线从表面反射的物理可实现性条件决定。对于任意给定的微面元入射角 θ_d 与差角 θ_h , 并非所有方位角 ϕ_d 的组合都能对应真实的外部反射过程。下面将从几何光学的基本约束出发, 推导光线的有效反射区域的数学表达式, 并据此识别与滤除 pBRDF 数据空间中非物理的几何构型。

根据 Rusinkiewicz 参数化框架, 宏观入射角 θ_i 与出射角 θ_o 可由参数 $(\theta_d, \phi_d, \theta_h)$ 唯一确定。由于半程向量 $\mathbf{h}$ 平分入射方向 ω_i 与出射方向 ω_o , 则:

$$\omega_i = 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})\mathbf{h} - \omega_o. \quad (5)$$

将 ω_i 与 ω_o 分别投影至表面法线 $\mathbf{n}$ 方向, 经过向量运算可得:

$$\cos \theta_i = \mathbf{n} \cdot \omega_i = \cos \theta_h \cos \theta_d + \sin \theta_h \sin \theta_d \cos \phi_d. \quad (6)$$

同理可得:

$$\cos \theta_o = \mathbf{n} \cdot \omega_o = \cos \theta_h \cos \theta_d - \sin \theta_h \sin \theta_d \cos \phi_d. \quad (7)$$

外部反射过程必须满足以下基本条件, 入射光线与出射光线均从上半球入射, 即 $\cos \theta_i > 0$, $\cos \theta_o > 0$ 。

在式 (6) 中, 记 $A = \cos \theta_h \cos \theta_d$, $B = \sin \theta_h \sin \theta_d \geq 0$, 则 $\cos \theta_i = A + B \cos \phi_d$ 。由于

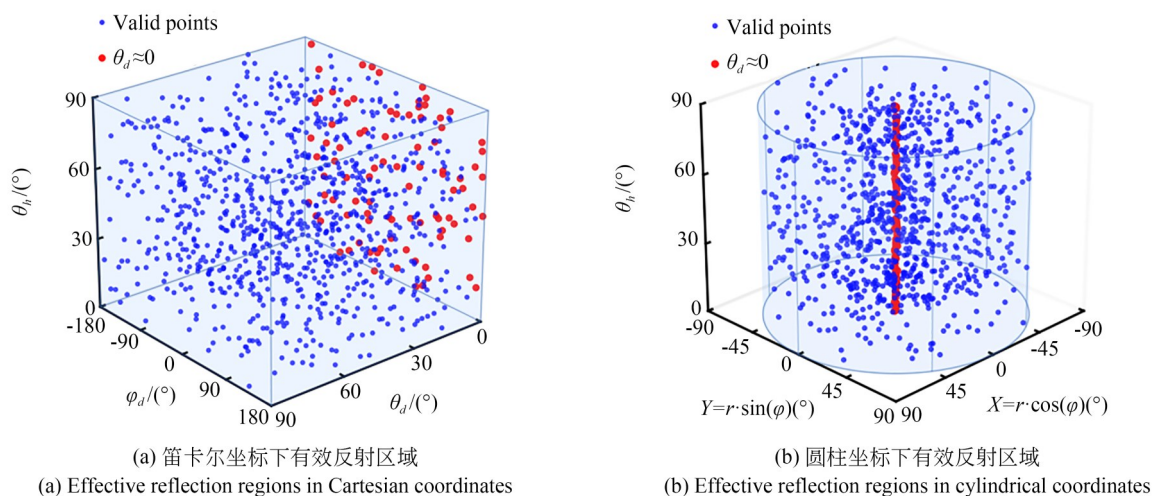


图3 笛卡尔坐标与圆柱坐标下有效反射区域的对比

Fig. 3 Comparison of effective reflection regions in Cartesian coordinates and cylindrical coordinates

$B \geq 0$, $\cos \theta_i$ 是 $\cos \phi_d$ 的单调递增函数。因此,当 $\cos \phi_d = 1$ (即 $\phi_d = 0$) 时, $\cos \theta_i$ 取最大值;当 $\cos \phi_d = -1$ (即 $\phi_d = \pi$) 时, $\cos \theta_i$ 取最小值,于是有:

$$\min_{\phi_d} \cos \theta_i = \cos \theta_h \cos \theta_d - \sin \theta_h \sin \theta_d. \quad (8)$$

同理可推得:

$$\min_{\phi_d} \cos \theta_o = \cos \theta_h \cos \theta_d - \sin \theta_h \sin \theta_d. \quad (9)$$

应用余弦的和角公式:

$$\cos(\theta_h + \theta_d) = \cos \theta_h \cos \theta_d - \sin \theta_h \sin \theta_d. \quad (10)$$

因此可得到统一表达式:

$$\min_{\phi_d} \cos \theta_o = \min_{\phi_d} \cos \theta_i = \cos(\theta_h + \theta_d). \quad (11)$$

为保证对所有 ϕ_d 均满足 $\cos \theta_i > 0$, $\cos \theta_o > 0$, 需保证各自的最小值大于零。由式(10), 两个最小值相同, 因此需满足:

$$\cos(\theta_h + \theta_d) > 0. \quad (12)$$

考虑到 $\theta_h, \theta_d \in [0, \pi/2)$, 余弦函数在该区间内严格为正, 因此, 上述不等式等价于: $\theta_d + \theta_h < 90^\circ$ 。在微面元理论中, 当不满足该式时, 意味着微面元的取向过于极端, 光线是沿着表面"滑行"或从背面照射, 此时反射率理论上会趋近于零, 实际上对应着非物理的光线反射几何配置。因此式(12)的约束条件确保了真实材料表面在可观测的反射几何中, 其微观取向与宏观观测方向之间满足相容条件, 使反射过程不违反能量守恒定律。此外, 实际测量数据的空间分布是物理约

束、测量系统几何限制以及材料自身散射特性三者共同作用的结果。因此, 在构建完备的 pBRDF 数据库时, 应基于这一物理先验, 在可行区域内优化采样策略, 以确保对高重要性散射方向的充分覆盖。

3.2 物理约束插值重建方法

在获得紧凑的数据表示后, 解决稀疏采样下的数据重建问题, 并保证重建结果的物理正确性。一个穆勒矩阵 M 是物理可实现的, 当且仅当对应的 Cloude 相干矩阵是半正定的, 此条件等价于满足一系列数学约束。传统插值方法将穆勒矩阵 16 个元素作为独立标量处理, 完全忽略其内在物理耦合约束, 插值结果极易违背物理合法性条件, 产生非物理解。尽管圆柱坐标构成一个可微流形, 考虑到 pBRDF 采样密度较高且局部几何变化平滑, 本文在该流形上采用局部欧氏距离结合角度周期性修正的插值核, 而非全局测地线插值。这种近似在保持物理一致性的前提下显著降低了计算复杂度。

设圆柱坐标空间中有 N 个稀疏采样点, 每个采样点由几何坐标 $x_i = (r_i, \phi_i, z_i)$ 和对应的物理穆勒矩阵 $M_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 组成。对于任意查询点 x_q , 算法的目标是估计出一个物理正确的穆勒矩阵。第一阶段基于几何相似性的局部线性插值获得初始估计; 第二阶段通过直接的物理约束投影操作, 将非物理的初始估计修正为物理可实现矩阵。

首先是邻域检索与权重计算,在圆柱坐标参数空间中定位查询点附近的 k 个最近邻采样点。采用考虑周期性特性的距离度量:

$$d_i = \sqrt{\alpha_r(r_q - r_i)^2 + \alpha_\phi \Delta_\phi(\phi_q, \phi_i)^2 + \alpha_z(z_q - z_i)^2}, \quad (13)$$

其中: $\Delta_\phi(\phi_1, \phi_2)$ 函数处理方位角的周期性,确保在 $\phi = \pm\pi$ 边界处的连续性。当 $r = \theta_d < \epsilon$,方位角维度权重衰减为0,圆柱距离度量简化为 $d_i = \sqrt{\alpha_r(r_q - r_i)^2 + \alpha_z(z_q - z_i)^2}$,同时对该区域的插值结果额外施加径向平滑约束,若查询点与邻域点的 $\Delta\theta_d > 5^\circ$,则将其权重降低为原来的 $1/(\Delta\theta_d + 1)$,避免近法向区域因采样稀疏出现数值跳变。参数 $\alpha_r, \alpha_\phi, \alpha_z$ 根据各维度的物理意义和变化范围进行归一化设置, $\alpha_r = \frac{1}{\Delta r_{\max}^2}$, $\alpha_\phi = \frac{1}{\pi^2}$, $\alpha_z = \frac{1}{\Delta z_{\max}^2}$ 。然后进行线性初始估计,通过加权平均获得查询点处的初始穆勒矩阵估计:

$$\mathbf{M}_{\text{init}} = \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{M}_i, \text{得到的 } \mathbf{M}_{\text{init}} \text{ 可能违反物理约束}$$

条件,因为物理穆勒矩阵的集合不是线性空间,对物理矩阵的凸组合不一定仍为物理矩阵。为确保输出矩阵的物理合法性,本方法依次执行互易性对称化、Cloude 半正定截断与能量守恒裁剪。这一流程与 Devlaminck 等人提出的在相干矩阵空间施加物理约束的插值框架一致^[18]。

对初始估计 $\mathbf{M}_{\text{init}}$ 施加正交投影 $\mathbf{M}^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\text{init}} + \mathbf{D}\mathbf{M}_{\text{init}}^T\mathbf{D})$ 。该操作确保穆勒矩阵结构满足光学互易性原理。互易性仅约束矩阵结构,不保证物理可实现性。需通过 Cloude 分解进一步约束特征谱。利用泡利矩阵基将 $\mathbf{M}^{(1)}$ 映射为厄密矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{M})$,然后进行特征值分解 $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H$,并将负特征值截断为零: $\lambda_k^+ = \max(0, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots, 4$,重构相干矩阵:

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+, \lambda_4^+) \mathbf{U}^H. \quad (14)$$

最后逆映射至穆勒矩阵 $\mathbf{M}^{(2)}$ 。此步骤消除了非物理的负特征值,保证了矩阵的物理可实现性。最后,对 $\mathbf{M}^{(2)}$ 施加能量约束。对于反射过程,反射率应满足 $0 \leq m_{00} \leq 1$ 。若存在越界,对矩阵进行归一化处理: $\mathbf{M}_{\text{phy}} = \mathbf{M}^{(2)}/M_{00}^{(2)}$ 。若 $M_{00}^{(2)} \leq 0$,则将矩阵置为零矩阵或邻域中值矩阵。

综上,该算法首先通过圆柱坐标下的局部线性模型快速获取近似解,随后通过物理投影操作,系统地修正并保障了结果的物理正确性。整个流程确保了即使在数据稀疏区域,重建出的穆勒矩阵场也是连续、平滑且严格物理的。

3.3 物理约束的偏振光线追踪方法

光源发射入射光斯托克斯矢量,经场景几何与介质传播后,与物体表面 pBRDF 穆勒矩阵发生相互作用,最终由相机接收出射光斯托克斯矢量。

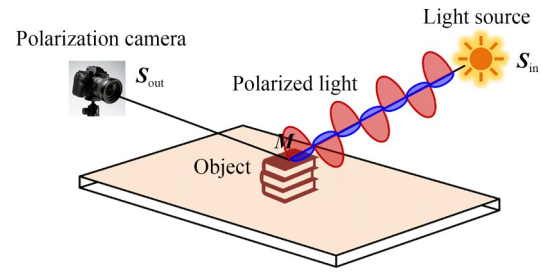


图4 偏振光传播与表面交互过程示意图

Fig. 4 Schematic illustration of the propagation of polarized light and its interaction with surfaces

偏振光渲染基于矢量形式的渲染方程,像素处的斯托克斯矢量由场景中的光源、材质反射特性(即穆勒矩阵)及几何关系共同决定:

$$\mathbf{S}_o(\theta_o, \phi_o) = \int_{\Omega_i} \frac{1}{\cos \theta_i \cos \theta_o} \mathbf{M}_{\text{local}}(\theta_i, \phi_i; \theta_o, \phi_o) \cdot \mathbf{S}_i(\theta_i, \phi_i) \cos \theta_i d\omega_i. \quad (15)$$

利用式(15)所示的偏振渲染方程,对入射半球 Ω_i 内各方向的入射斯托克斯矢量 $\mathbf{S}_i(\theta_i, \phi_i)$ 进行积分,并考虑双向反射分布函数对应的穆勒矩阵 $\mathbf{M}_{\text{local}}$ 的偏振调制作用,可计算像素处的出射斯托克斯矢量 $\mathbf{S}_o(\theta_o, \phi_o)$ 及其辐射亮度。其中, (θ_i, ϕ_i) 和 (θ_o, ϕ_o) 分别为入射与出射方向的天顶角和方位角, $\cos \theta_i$ 和 $\cos \theta_o$ 为相应的倾斜因子,用于修正投影面积; $d\omega_i$ 为入射方向的立体角微元。获得 $\mathbf{S}_o = [S_0, S_1, S_2, S_3]^T$ 后,进一步由 S_0 提取总强度,并按 $\text{DoP} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}/S_0$ 与 $\text{AoP} = \frac{1}{2} \arctan(S_2/S_1)$ 分别计算偏振度(Degree of Polarization, DoP)和偏振角(Angle of Polarization, AoP),最终生成场景的偏振渲染结果。

Baek 等人提出的现有渲染流程,目前在 Mitsuba 2 中实现。该流程从传输光线追踪开始,经光线参数化后,对已加载的 912 MB pBRDF 数据集采用传统线性插值,并针对未直

接测量的几何配置对穆勒矩阵元素进行插值。由于此过程未对插值结果施加物理约束,可能导致非物理性的穆勒矩阵,从而影响后续偏振渲染的准确性。

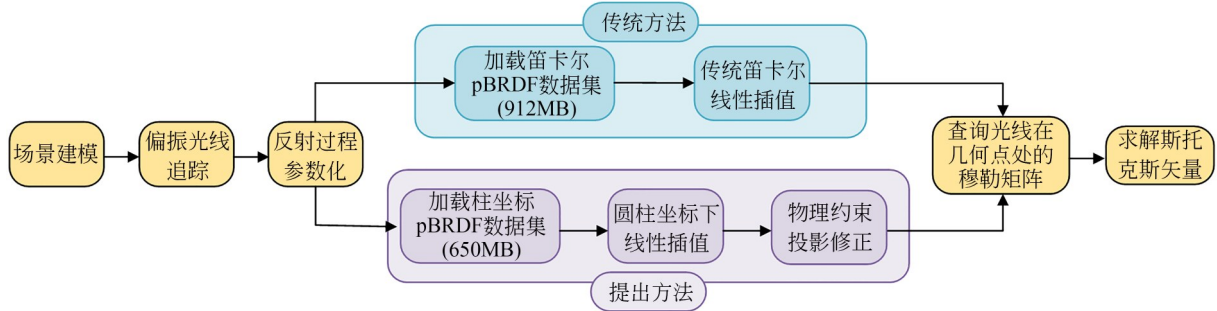


图 5 偏振渲染流程对比示意图

Fig. 5 Comparison of polarization rendering workflows

本文提出的方法首先对原始 912 MB 的 pBRDF 数据集进行圆柱坐标参数化,有效剔除非物理冗余,将实际参与插值计算的数据规模压缩至 650 MB,然后再在该压缩表示上进行线性插值。关键改进在于,插值并非直接作用于穆勒矩阵元素,而是作用于其相干本征谱。插值完成后,通过基于互易性对称化、Cloude 的正定性判定与能量守恒投影对结果进行物理修正,确保生成始终符合物理规律的中间数据。最终,修正后的相干本征谱被转换回穆勒矩阵,并进入后续的偏振图像渲染生成。这个过程不仅通过柱坐标数据参数化避免了插值核在周期性边界及参数退化区域插值核的失效,更通过谱域插值与物理约束投影,从根本上保障了插值结果的物理正确性。

4 实验设置与结果

4.1 实验设置

为全面且严谨地验证本研究所提优化方法的有效性,本节设计了实验方案,验证其不同材质在插值重建与渲染精度方面的提升。选用 KAIST 发布的大规模偏振 BRDF 数据库作为基准测试数据。选择该数据库的原因包括其公开性与权威性(目前公开的最大规模经验性 pBRDF 数据库)、数据完整性(包含多种材质类型,覆盖广泛散射几何)、测量系统性(采用标准

化的偏振成像采集流程)以及可比性(相关研究多以此数据库为基准,便于方法比较)。硬件配置方面,使用 Intel Core i7-12700K CPU 作为主要计算单元,配备 64 GB DDR4 内存用于数据缓存与处理,1 TB NVMe SSD 用于数据读写,NVIDIA RTX 3080 GPU 用于渲染加速(可选)。

4.2 圆柱坐标变换可逆性分析

将 Rusinkiewicz 参数空间中的 $(\theta_h, \theta_d, \phi_d)$ 坐标映射至圆柱坐标空间,以消除差分方位角的周期边界断裂,并处理 $\theta_d = 0$ 时方位角退化导致的参数冗余。该坐标变换应用于 pBRDF 数据时,需要能够逆向定位至原始参数网格,以保证 Mueller 矩阵数据在紧凑表示和恢复过程中的一致性。因此,本节验证圆柱紧凑表示在非轴区域的可逆性,并分析圆柱轴区方位索引合并是否会造成有效偏振测量信息损失。

如第 3.1 节所示,对于 $\theta_d > 0$ 的非轴区域,圆柱映射及其逆映射具有确定的一一对应关系。方位角作为周期变量,其首尾边界在圆柱表示中连续连接;而在 $\theta_d = 0$ 的圆柱轴处,所有方位角对应同一几何方向,方位角不再具有独立的几何意义。为验证圆柱坐标变换对 Mueller 数据的保真能力,选取 KAIST 数据集集中的 Gold 和 Purple Silicone 材料,在 550 nm 波段下,将圆柱紧凑表示中的 Mueller 数据恢复至原始 Rusinkiewicz 参数网格,并与原始测量数据进行逐元素比较。

pBRDF 数据以规则参数张量形式存储, $\theta_h \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\theta_d \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\phi_d \in (-180^\circ, 180^\circ)$, 共包含 2 989 441 个规则索引位置。该数量表示原始数据数组的存储网格, 并非所有索引位置均对应可观测的外部反射几何。对于反射型 pBRDF, 入射方向和出射方向均应位于表面外侧半球。依据式(11)进行物理有效几何筛选后, Gold 和 Purple Silicone 两种材料均保留 2 228 352 个物理有效离散采样点, 占原始规则网格的 74.54%。其余离散采样点虽然位于原始数组索引范围内, 但不满足外部反射几何条件, 因此不参与坐标逆变换误差统计。

为避免将散点插值误差混入坐标变换误差, 本文不对恢复离散采样点执行插值、拟合、近邻搜索或外推。对于每一个同时满足物理有效几何条件、位于非轴区域且具有有限测量值的 Mueller 标量元素, 依据圆柱紧凑离散采样点与原始参数网格之间的索引对应关系, 直接恢复其 Mueller 矩阵元素。设 M_i^{ref} 为原始参数网格中的第 i 个有效 Mueller 标量元素, 设 M_i^{rec} 为圆柱紧凑表示经直接索引恢复后的对应元素, N 为参与比较的有限标量元素总数, 则平均绝对误差 (Mean

Absolute Error, MAE) 为:

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |M_i^{\text{rec}} - M_i^{\text{ref}}|. \quad (16)$$

均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE) 定义为:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (M_i^{\text{rec}} - M_i^{\text{ref}})^2}. \quad (17)$$

最大绝对误差 (Maximum Absolute Error, MaxAE) 定义为:

$$\text{MaxAE} = \max_{1 \leq i \leq N} |M_i^{\text{rec}} - M_i^{\text{ref}}|. \quad (18)$$

表 1 给出了两种材料在 550 nm 波段下的直接往返恢复结果。在全部具有有限测量值的非轴样本上, Gold 和 Purple Silicone 的 MAE, RMSE 和 MaxAE 均为 0。在 $\theta_d=0$ 的圆柱轴区, 原始规则网格中虽然包含多个方位角, 但这些方位角对应同一圆柱轴位置, 方位角在该处发生几何退化。数据检查表明, Gold 和 Purple Silicone 在该区域均不存在有限的 Mueller 测量值, 因此轴区不参与误差统计, 方位角合并不会删除可用的实测偏振样本。方位周期边界子集的直接逆变换同样为零误差, 说明圆柱坐标表示在方位周期边界区域未引入数据误差。

表 1 550 nm 波段 Gold 和 Purple Silicone 材料圆柱紧凑表示的坐标变换可逆性

Tab. 1 Reversibility of the cylindrical compact representation for Gold and Purple Silicone at 550 nm

材质	区域	物理有效几何 离散采样点数	理论 Mueller 标量元素 数(离散采样点 $\times 16$)	有限 Mueller 标量元素数 N	MAE	RMSE	MaxAE
Gold	全部实测物理样本	2 228 352	35 653 632	30 079 116	0	0	0
	非轴区 $\theta_d > 0$	2 195 862	35 133 792	30 079 116	0	0	0
	圆柱轴 $\theta_d = 0$	32 490	519 840	0	—	—	—
	方位周期边界子集	198 272	3 172 352	2 682 456	0	0	0
Purple silicone	全部实测物理样本	2 228 352	35 653 632	30 385 708	0	0	0
	非轴区 $\theta_d > 0$	2 195 862	35 133 792	30 385 708	0	0	0
	圆柱轴 $\theta_d = 0$	32 490	519 840	0	—	—	—
	方位周期边界子集	198 272	3 172 352	2 669 688	0	0	0

原始规则网格包含 2 989 441 个离散采样点, 经物理有效几何筛选后保留 2 228 352 个离散采样点, 相较原始网格减少 25.46%。其中, 圆柱轴区包含 32 490 个离散采样点, 占物理有效离散采样点的 1.46%。剔除轴区的方位冗余后, 圆柱紧凑表示保留 2 195 862 个非轴有效离散采样点, 相较原始规则网格总计减少 26.54%。冗余消除主

要来自非物理反射构型的剔除; 圆柱轴方位合并仅进一步消除了物理有效离散采样点中的几何冗余。

坐标变换可逆性实验表明, 圆柱坐标表示在具有有限实测值的非轴采样离散采样点上可通过直接索引无误差恢复至原始 Rusinkiewicz 参数网格。后续建模中因降低采样密度或采用散点

插值预测未存储位置而产生的误差,例如边界邻域不足、方位周期处理或插值核选择导致的误差,属于pBRDF重建算法误差,而非圆柱坐标变换本身造成的信息损失。

4.3 插值精度分析

选取KAIST数据库中的Gold材质作为代表性金属样本,Purple silicone作为代表性电介质样本,并在550 nm波段下进行评估。为了模拟稀疏采样场景,对原始全密度数据进行了四倍下采样(采样步长 $\text{step}=2$)。插值算法采用逆距离加权策略,在圆柱坐标的距离度量中引入了尺度因子50以平衡角度维度。评估指标采用归一化RMSE(将矩阵除以各自的 m_{00} 以消除绝对光强

差异)、物理违反率以及DoP误差。综合考量重建精度与物理一致性,将Cloude半正定投影的特征值截断阈值设定为 10^{-6} 。然后分别采用以下三种方法重建完整参数空间的穆勒矩阵场:笛卡尔坐标下线性插值方法,在原始笛卡尔网格上执行三线插值,独立处理16个穆勒矩阵元素。在圆柱坐标表示下执行局部线性插值,并不施加后续物理约束投影,以隔离表示方法本身的贡献。然后在圆柱坐标表示的基础上引入物理约束投影。

图6展示了550 nm波段下Gold材质在三个几何维度上的插值性能对比。传统笛卡尔线性插值与纯圆柱坐标线性插值均存在明显的物理

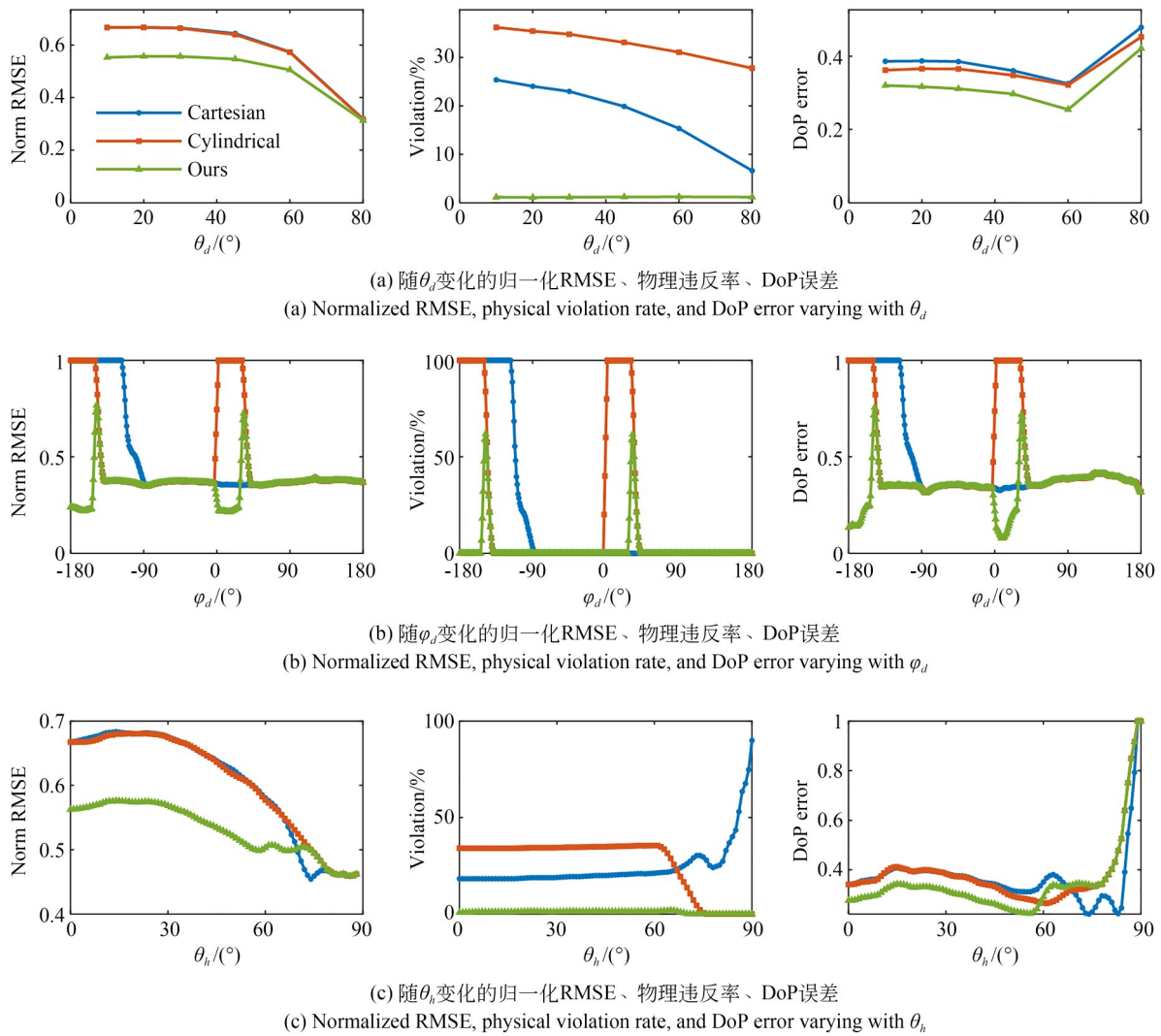


图6 不同方法下,Gold材质在不同几何维度上的插值精度对比

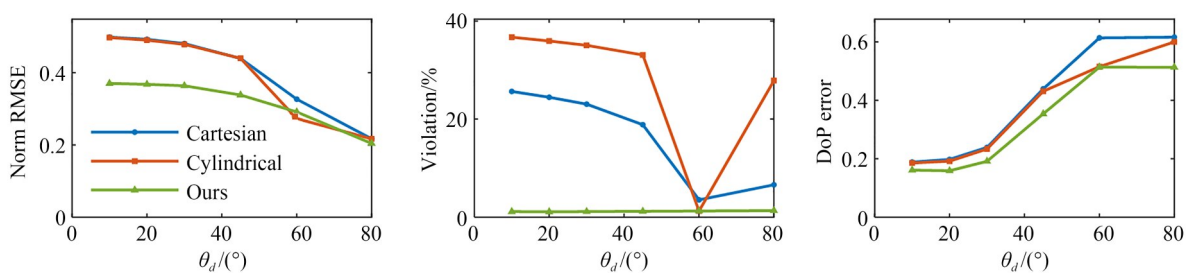
Fig. 6 Comparison of interpolation accuracy for Gold material across different geometric dimensions using various methods

失真与数值不稳定问题。如图 6(a)所示,微面元入射角减小时,Rusinkiewicz 参数化出现方位角退化,传统插值因无法处理该奇异性导致 RMSE 与违反率增大。本文方法通过圆柱坐标将退化平面收缩为直线,并结合谱域投影,将违反率压制至接近 0%。随入射角增大,掠射区遮挡效应与非涅尔非线性叠加使反射率剧烈变化,线性插值为保证能量守恒而平滑偏振极值;同时 DoP 在低光强区因分母波动导致误差上升。如图 6(b)所示,方位角接近 $\pm 180^\circ$ 时,未采用周期性距离度量会产生插值跳变。单纯圆柱坐标映射本身已能有效改善边界拓扑结构,降低 RMSE,但若不加物理约束,其输出的穆勒矩阵仍可能存在物理违反。本文通过嵌入周期性权重修正条件,消除边界不连续问题,使 RMSE 与 DoP 误差在全区间保持平滑最优。如图 6(c)所示,半角增大使几何趋近正入射,RMSE 下降,但正入射区偏振信号微弱且对微观形貌敏感,插值为维持能量守恒而平滑偏振波动,加上总强度较高,微小绝对误差被放大为显著 DoP 误差。本文方法通过物理约束平衡这一矛盾,实现零违反率并将 DoP 误差最小化。

pBRDF 插值的核心难点在于掠射区的强非线性和正入射区的高敏感性。本文的方法通过

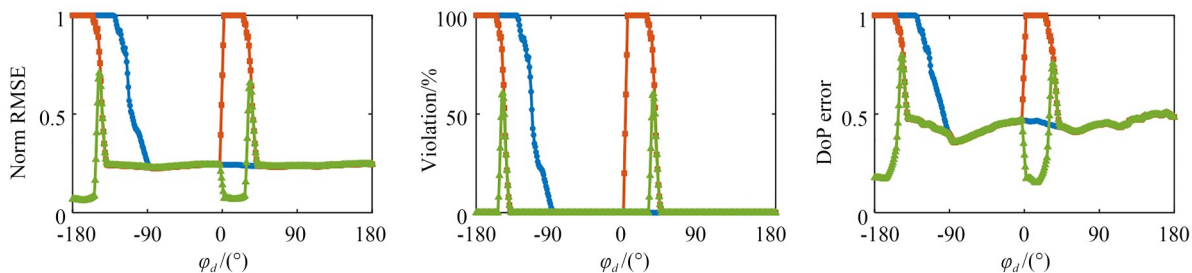
圆柱坐标映射消除参数退化,引入周期性权重修正边界不连续,并利用谱域投影确保物理可行性,从而在全参数空间内达成了精度与物理一致性的最佳平衡。未来可探索自适应插值核,以进一步提升对微观偏振特征的捕捉能力。

与金属 Gold 类似,本文方法在 550 nm 波段下 Purple Silicone 材质的全参数空间内有效消除了非物理伪影并保持最低违反率,但受限于硅胶低反射率、高退偏特性,其误差演化机制存在差异。如图 7(a)所示,掠射区本文方法虽保持最低 RMSE 与零违反率,但 DoP 误差上升较 Gold 更显著。硅胶为弱反射材质,掠射区总强度趋近于零,传统方法的误差跳变对弱信号干扰严重,本文方法通过物理约束展现出更强鲁棒性。如图 7(b)所示,本文方法通过最短弧长距离度量彻底消除边界插值跳变。硅胶偏振响应虽低于 Gold,但其偏振态在边界处变化更敏感,传统方法的不连续性会引发严重偏振伪影,本文方法的平滑表现对此类材质至关重要。如图 7(c)所示,随半角增大趋近正入射,RMSE 下降,但 DoP 误差出现极端尖峰,与 Gold 趋于平稳的现象截然不同。硅胶作为高退偏材质,正入射时偏振散射效应复杂,传统插值难以捕捉高频微观波动,在拟合宏观强度的同时丢失偏振特征。



(a) 随 θ_d 变化的归一化 RMSE、物理违反率、DoP 误差

(a) Normalized RMSE, physical violation rate, and DoP error varying with θ_d



(b) 随 ϕ_d 变化的归一化 RMSE、物理违反率、DoP 误差

(b) Normalized RMSE, physical violation rate, and DoP error varying with ϕ_d

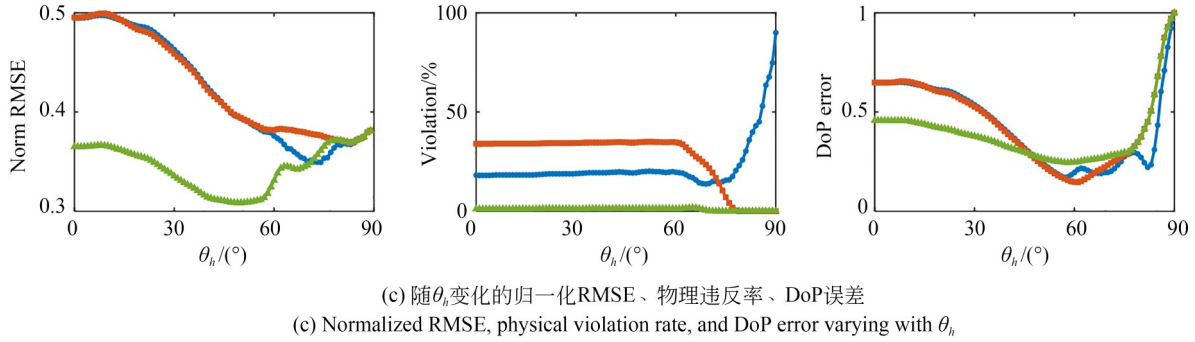


图7 不同方法下, Purple silicone 材质在不同几何维度上的插值精度对比

Fig. 7 Comparison of interpolation accuracy for Purple silicone material across different geometric dimensions using various methods

综上所述,本文方法通过谱域物理投影,在满足能量守恒的前提下实现了微观偏振信息的有效保留与误差放大的抑制。该方法不仅适用于金属材料,亦对弱反射、高偏振敏感材质展现出良好适用性,充分揭示了物理约束机制在不同材质插值重建中的重要作用。

4.4 偏振渲染结果分析

真实偏振图像的采集对环境控制要求极高,需同步精确标定光源偏振态、相机响应、物体几何形貌及材质属性,这在实验上极难实现。因此,为评估所提方法在实际渲染中的有效性,将圆柱坐标表示与物理约束插值嵌入基于 Mitsuba 2 的偏振光线追踪流程,并对渲染输出的 DoP 与 AoP 进行定性与定量评估。采用前节所述的交叉验证策略,以消除数据源差异引入的干扰。从 KAIST 数据库中随机剔除 20% 的散射几何采样点作为测试集,保留剩余 80% 作为训练集。分别采用传统离散 pBRDF 插值方法、TD 方法以及本文提出的物理约束插值方法,重建被剔除位置的穆勒矩阵,并将其代入渲染管线生成偏振图像。在非偏振光入射条件下,偏振度偏差定义为两幅图像间每个像素 DoP 值的绝对误差:

$$\sigma^2(\text{DoP}^a, \text{DoP}^b) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|\text{DoP}_n^a - \text{DoP}_n^b\|^2.$$

使用斯托克斯参数向量 $\mathbf{r} = [S_1, S_2]$ 的点积来计算偏振角的角度误差:

$$\sigma^2(\text{AoP}^a, \text{AoP}^b) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\mathbf{r}_n^a \cdot \mathbf{r}_n^b}{\|\mathbf{r}_n^a\| \|\mathbf{r}_n^b\|} \right) \right]^2. \quad (19)$$

如图 8 所示,本文比较了不同方法在稀疏采样条件下对 Gold 材质的 RGB 图像、DoP 图像和 AoP 图像的重建结果,并以高密度采样渲染结果作为真实参考值(Ground Truth, GT)。在环境光照、观测几何及渲染设置下,粗糙 Gold 表面的反射具有明显的方向选择性。大部分区域在相机方向上的反射能量较低,呈现暗色基底,只有少量满足镜面反射条件的微表面将高亮环境辐射反射至相机,形成局部金色高光。同时,微表面法线分布、掩蔽/阴影效应及多次散射会削弱偏振保持性,使粗糙 Gold 表现出显著的退偏特性,其 GT DoP 最大值仅为 0.322 9。

在稀疏采样条件下,传统线性插值方法(Linear)未显式引入 Mueller 矩阵的物理可实现性约束,导致重建结果的偏振统计特性明显偏离 GT。其 DoP 均值为 0.242 4,最大值达到 1.000 0,均显著高于 GT 的均值 0.048 9 和最大值 0.322 9。

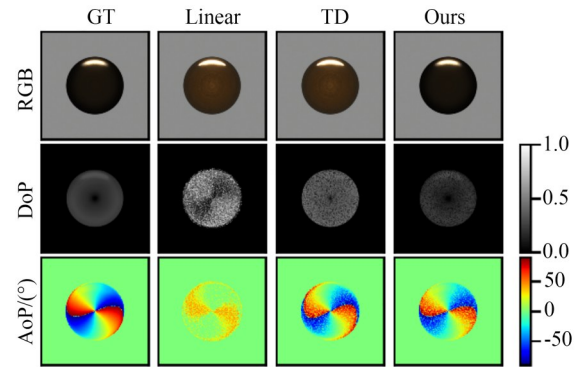


图8 不同方法下 Gold 材质的偏振特性重建质量对比

Fig. 8 Comparison of polarization characteristic reconstruction quality for Gold using different methods

该现象表明,无约束插值在稀疏采样条件下容易放大测量噪声和角度域插值误差,并产生异常的高 DoP 伪影。TD 方法通过特征谱域重建在一定程度上减弱了过估计,但其 DoP 均值和最大值仍分别为 0.072 3 和 0.459 7,与真实分布仍存在偏差。

本文方法在重建过程中引入互易性、Cloude 半正定性和能量约束,使输出 Mueller 矩阵保持更好的物理一致性。其 DoP 均值为 0.039 2,最大值为 0.322 9,与 GT 结果最为接近。上述结果验证了所提方法在稀疏采样条件下恢复真实偏振分布、抑制非物理高偏振伪影以及维持偏振渲染物理一致性方面的优势。

为了验证算法在电介质材质上的泛化能力,选取紫色硅胶作为测试对象,其渲染结果如图 9 所示。Purple Silicone 的 GT DoP 均值为 0.019 4,低于 Gold 的 0.048 9,表明其大部分区域以低 DoP 响应为主;但其局部 DoP 最大值可达 0.458 8,高于 Gold 的 0.322 9。两种材料在 DoP 的空间分布、局部峰值及相应的 Mueller 矩阵特征谱结构上呈现偏振差异。

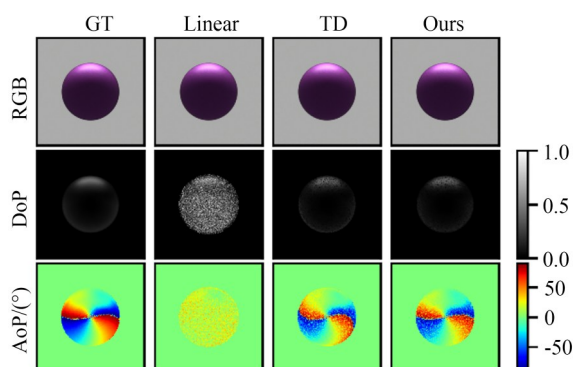


图 9 不同方法下 Purple silicone 材质的偏振特性重建质量对比

Fig. 9 Comparison of polarization characteristic reconstruction quality for Purple silicone using different methods

TD 方法采用 Cloude 相干矩阵特征谱的三重简并近似,对于以低 DoP 区域为主、退偏散射占主导且非主特征值接近简并的材料或散射区域,该假设具有较好的适用性。因此,TD 方法在 Purple Silicone 上得到的 DoP 最大值为 0.482 2,与 GT 的 0.458 8 相对接近。然而,Gold 表面的

实际特征谱可能偏离该预设简并结构,使 TD 方法难以完整表征其复杂的偏振散射行为,并导致 Gold 场景中的 DoP 出现明显过估计。

本文方法不对 Cloude 相干矩阵的特征值结构施加固定的简并假设,而是通过互易性约束、Cloude 正定性约束和能量约束,将最终重建结果限制在物理可行域内。实验结果表明,本文方法在 Gold 和 Purple Silicone 两种具有不同偏振分布特征的材料上,均能更准确地恢复 GT 的 DoP 峰值及整体统计特性,体现出更好的材料适应性与重建稳定性。

为评估所提方法在图像重建与偏振信息保持方面的性能,本文采用结构相似性指数 (Structural Similarity Index Measure, SSIM)、相关系数 (Correlation Coefficient, CC)、互信息 (Mutual Information, MI) 和峰值信噪比 (Peak Signal-To-Noise Ratio, PSNR) 作为定量评价指标。其中,SSIM 衡量图像在亮度、对比度和结构上的相似性;CC 反映两幅图像的线性相关程度;MI 表征图像间的信息共享能力;PSNR 则综合像素动态范围与重建误差评价图像质量。上述指标数值越高,说明重建结果与参考图像越接近,重建质量越好。

表 2 给出了 Gold 和 Purple Silicone 两种材料在 DoP 和 AoP 两类偏振渲染结果上的相似性指标对比。本文方法在不同的评价指标上均取得了最优结果,表现出稳定且一致的性能优势。本文方法在 Gold 的 DoP 图像上的 SSIM, CC, MI 和 PSNR 均优于 Linear 和 TD 方法;在 AoP 结果上,本文方法同样在全部指标上取得最佳表现。对于 Purple Silicone,本文方法也保持了相同趋势,DoP 和 AoP 的提升相较于 Gold 更为明显,说明所提方法能够有效地保持偏振态相关信息。

在实际偏振渲染应用中,场景通常包含多种材质、复杂几何结构及多路径光照。为验证所提方法在复杂场景中的适用性,并分析物理约束对渲染结果的影响,图 10 对比了柱坐标下线性插值与物理约束插值的 RGB, AoP 和 DoP 渲染结果及其差异分布。

如图 10(a) 所示 (彩图见期刊电子版),基于柱坐标的传统线性插值在场景的 RGB 渲染结果中,高光及复杂光照区域呈现较低亮度,整体动

表 2 不同插值方法在 Purple Silicone 和 Gold 上 DoP 和 AoP 结果与 GT 的相似性指标对比

Tab. 2 Comparison of similarity metrics between DoP and AoP results from different interpolation methods on Purple Silicone and Gold, and those from the ground truth

材质	图像类型	方法	SSIM $\uparrow$	CC $\uparrow$	MI $\uparrow$	PSNR $\uparrow$
Gold	DoP	Linear	0.735 9	0.218 1	0.321 3	8.32
		TD	0.773 4	0.489 3	1.024 2	14.61
		Ours	0.806 6	0.593 7	2.862 1	20.53
	AoP	Linear	0.733 2	0.422 6	0.420 1	1.55
		TD	0.773 1	0.709 8	1.391 0	3.90
		Ours	0.807 7	0.895 5	4.290 3	8.22
Purple silicone	DoP	Linear	0.734 2	0.075 6	0.332 7	6.96
		TD	0.898 3	0.807 3	1.799 8	25.51
		Ours	0.905 2	0.823 7	3.018 9	25.90
	AoP	Linear	0.732 1	0.089 9	0.461 7	0.95
		TD	0.780 5	0.723 1	1.225 2	4.60
		Ours	0.819 7	0.896 1	4.269 9	8.69

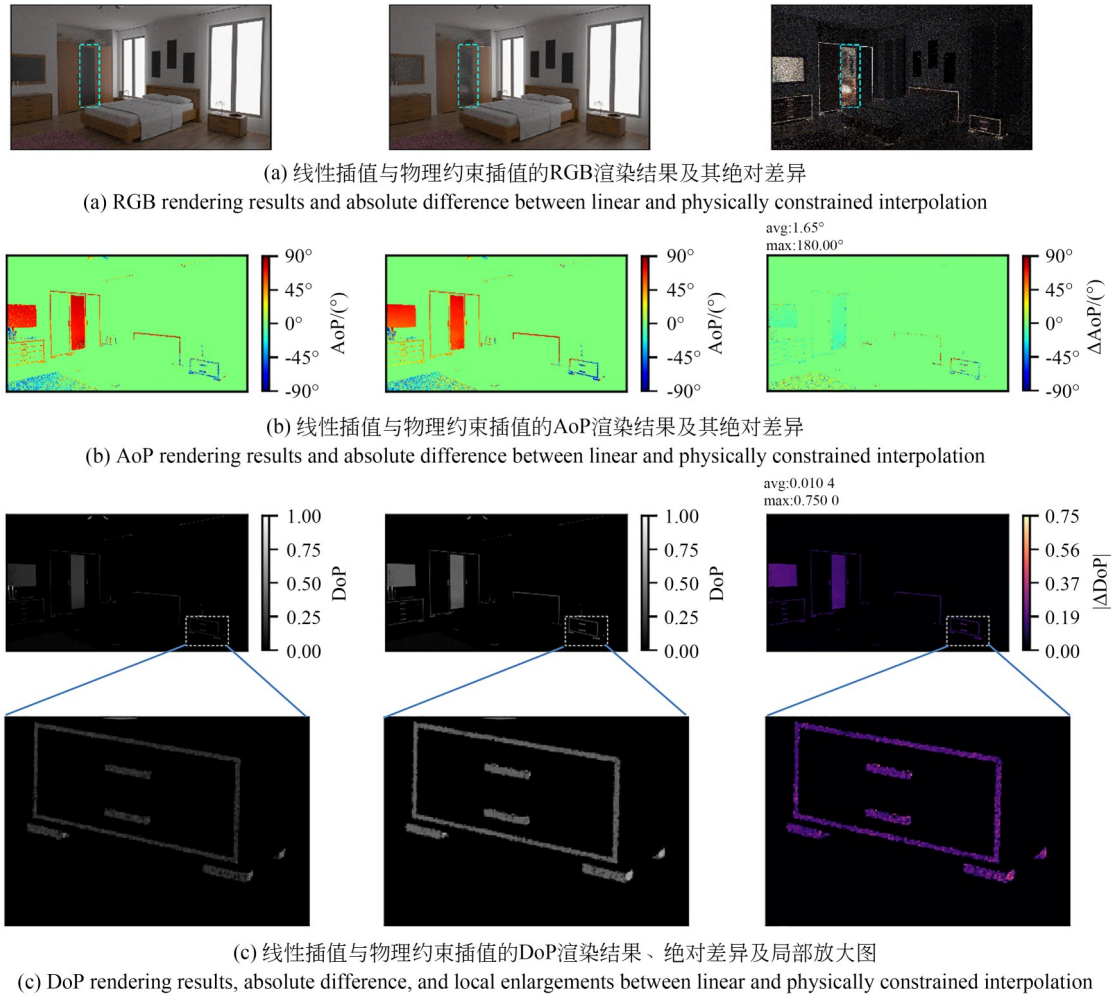


图 10 柱坐标下线性插值与物理约束插值方法的偏振渲染结果对比:RGB、AoP、DoP 及差异分布

Fig. 10 Comparison of polarization rendering results obtained using linear and physically constrained interpolation: RGB, AoP, DoP, and their difference maps in cylindrical coordinates

态范围受限;而本文方法通过引入能量约束,在镜面反射区域(如青色虚线框标注的镜面区域)重建了更合理的辐射亮度分布,有效抑制了高光细节丢失,展现出更好的视觉一致性。偏振度反映了反射光中偏振成分的比例,是衡量材质和表面特性的重要指标,对材质区分与表面特性分析具有重要意义。在线性插值结果中,DoP 图整体偏暗,部分有效偏振信号被压缩甚至淹没,尤其在柜边、镜框等高光反射边缘区域(如图 10(c)局部放大区域),偏振轮廓较为模糊。相比之下,本文方法在 DoP 图中能够更清晰地勾勒出上述区域的几何轮廓,在低照度区域亦能保持合理的偏振信息,有效避免非物理伪影的引入。对于墙面、木质家具等漫反射主导的退偏区域,其固有 DoP 响应极低,本文方法正确保持了这一物理特性,未产生虚假偏振信号,验证了物理约束在区分不同材质偏振响应方面的有效性。两种方法的差异图表明,主要差异集中于镜面高光及材质边缘等偏振响应显著的区域,这进一步验证了本文方法在复杂场景中对偏振信息恢复的有效性和泛化能力。

5 结 论

本文提出了 pBRDF 的圆柱坐标紧凑表示与物理约束谱域插值方法。在几何表示层面,通过圆柱坐标重参数化构建了连续且物理一致的插值空间,从几何层面消除了插值奇异性,避免了传统笛卡尔网格在周期性边界与退化区域的插值核失效问题。在重建算法层面,设计了基于周期距离度量的局部线性插值与三重物理约束(互易性对称化、Cloude 半正定特征值截断、能量守恒裁剪)相结合的谱域插值算法,使输出 Mueller 矩阵严格满足物理可实现性。

本文验证了圆柱紧凑参数化的可逆性和偏振信息保真性。对于 Gold 和 Purple Silicone 的实测 Mueller 样本,紧凑离散采样点经直接坐标逆变换后,16 个 Mueller 元素均实现零 MAE、零 RMSE 和零 MaxAE,表明圆柱坐标变换本身不

损失非轴区域的实测偏振信息。该方法相较于传统线性插值方法均实现零物理违反率,并且在不同的入射角与方位角条件下均具有更高的插值精度。相较 TD 方法,本文方法不预设特征谱的简并形式,不依赖于材料的退偏特性,在 Gold 材质的 DoP 和 AoP 图像 SSIM 分别提升 4.3% 和 4.5%,Purple Silicone 材质分别提升 0.8% 和 5.0%。该方法适用于从电介质到金属等各类材质,尤其在低退偏材料上取得了更优的重建精度,验证了物理约束投影相较于 TD 方法的三重简并假设的泛化优势,实现了偏振数据的高精度重建,为高光谱 pBRDF 建模和大规模偏振场景仿真提供了可靠的数据基础。

然而,本研究存在以下局限性:首先是实验验证基于 KAIST 数据库的 550 nm 单波段数据,未涉及多波段或连续光谱的插值性能;其次是当前方法采用局部欧氏距离近似,在微面元入射角极端趋近零的区域仍存在轻微的数值敏感。此外,本文方法依赖于材质的 pBRDF/Mueller 矩阵测量数据,对于未提供偏振散射参数的透明材质(如玻璃),在当前渲染场景中采用简化退偏漫反射模型近似,尚不能恢复其真实的偏振反射与透射特性。针对上述局限,未来研究可从以下方向展开,将本方法扩展至高光谱偏振 BRDF (hp-BRDF) 数据,探索光谱维度的物理约束插值策略;结合神经隐式表示(如 NeISF, PolGS++) 实现自适应非均匀采样与重建,进一步降低存储与计算开销;优化物理约束投影算法(如引入自适应特征值截断或迭代投影),以满足实时偏振渲染的应用需求;引入真实玻璃的偏振反射/透射模型或实测玻璃 pBRDF 数据,以进一步验证方法对透明及半透明材质的适用性。

作者贡献声明:

李庚鹏:实验的设计及数据整理和分析;
蔡伟:论文构思和撰写;
杨志勇:论文审核与编辑写作;
王晓伟:实验数据分析;
王月圆:论文修改与格式校对。

参考文献:

[1] ZHANG Z W, YANG Z Y, CAI W, *et al.* A phe-

nomenological polarized spectral bidirectional reflectance distribution function based on spectral and spa-

- tial dependence [J]. *IEEE Photonics Journal*, 2025, 17(4): 5000115.
- [2] 段锦, 丁华藤, 杨嘉豪, 等. 基于粗糙表面的高阶镜面反射 pBRDF 模型[J]. *光学精密工程*, 2025, 33(14): 2153-2165.
- DUAN J, DING H T, YANG J H, *et al.* High order specular reflection pBRDF model based on rough surface [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2025, 33(14): 2153-2165. (in Chinese)
- [3] YANG P F, LI Y H, WU Z S, *et al.* Polarimetric bidirectional reflectance distribution function empirical model considering diffuse reflection polarization [J]. *Chinese Journal of Physics*, 2025, 97: 1135-1148.
- [4] BAEK S H, HEIDE F. Polarimetric spatio-temporal light transport probing [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(6): 1-18.
- [5] MIAO Y P, CHEN J Y, ZHANG X J, *et al.* Modeling and inverse rendering of polarimetric bidirectional reflectance distribution function for metal surfaces [J]. *Acta Optica Sinica*, 2024, 44(22): 2224001.
- [6] YANG M, MAO H X, WU J, *et al.* Goniopolarimetric properties of typical satellite material surfaces: intercomparison with semi-empirical pBRDF modeled results[J]. *Photonics*, 2025, 12(1): 17.
- [7] BAEK S H, JEON D S, TONG X, *et al.* Simultaneous acquisition of polarimetric SVBRDF and normals[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(6): 1-15.
- [8] 邹宏扬, 战俊彤, 李文君, 等. 基于二向偏振分布函数修正的机场地物材质可见光偏振特性研究[J]. *中国光学(中英文)*, 2025, 18(2): 343-358.
- ZOU H Y, ZHAN J T, LI W J, *et al.* Visible polarization characteristics of airport ground material based on BPDF correction [J]. *Chinese Optics*, 2025, 18(2): 343-358. (in Chinese)
- [9] 刘承麟, 战俊彤, 张肃, 等. 基于改进型 Blinn 遮蔽函数的目标材料表面可见光偏振反射研究[J]. *中国光学(中英文)*, 2024, 17(5): 1162-1174.
- LIU C L, ZHAN J T, ZHANG S, *et al.* Visible polarized reflection of target material surface based on improved Blinn masking function [J]. *Chinese Optics*, 2024, 17(5): 1162-1174. (in Chinese)
- [10] 张弛, 吴鑫, 谢建. 基于双向反射分布函数的海面红外偏振特性表征模型[J]. *光学精密工程*, 2020, 28(6): 1303-1313.
- ZHANG C, WU X, XIE J. Infrared polarization characteristics on sea surface based on bidirectional reflection distribution function [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2020, 28(6): 1303-1313. (in Chinese)
- [11] KUPINSKI M, JARECKI Q. Advances in polarimetric BRDF measurement and modeling [C]. *Proceedings of SPIE: Polarization: Measurement, Analysis, and Remote Sensing XVI*, 2024, 12512: 1251202.
- [12] BERGER K, WEIDLICH A, WILKIE A, *et al.* Modeling and verifying the polarizing reflectance of real-world metallic surfaces [J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2012, 32(2): 24-33.
- [13] KAVOOSIGHAFI B. *Data-driven Reflectance Acquisition and Modeling for Predictive Rendering* [D]. Norrköping: Linköping University Electronic Press, 2025.
- [14] 王文轩, 李瑶, 王利国. 基于柯西分布的红外偏振辐射优化模型[J]. *红外*, 2025, 46(8): 22-29.
- WANG W X, LI Y, WANG L G. Infrared polarization radiation optimization model based on the cauchy distribution [J]. *Infrared*, 2025, 46(8): 22-29. (in Chinese)
- [15] SHAO M Q, XIA C K, DUAN D X, *et al.* Polarimetric inverse rendering for transparent shapes reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2024, 26: 7801-7811.
- [16] HWANG I, JEON D S, MUÑOZ A, *et al.* Sparse ellipsometry: portable acquisition of polarimetric SVBRDF and shape with unstructured flash photography [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2022, 41(4): 1-14.
- [17] BAEK S H, ZELTNER T, KU H J, *et al.* Image-based acquisition and modeling of polarimetric reflectance [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(4): 1-14.
- [18] RUSINKIEWICZ S M. A New Change of Variables for Efficient BRDF Representation [C]. *Rendering Techniques '98*. Vienna: Springer, 1998: 11-22.
- [19] MOON Y, MAEDA R, SHIN S, *et al.* Hyperspectral Polarimetric BRDFs of Real-world Materials [C]. *Proceedings of the SIGGRAPH Asia 2025 Conference Papers*. Hong Kong: Association for Computing Machinery, 2025: 1-11. DOI: 10.1145/3757377.3763853.
- [20] DEVLAMINCK V. Mueller matrix interpolation in polarization optics [J]. *Journal of the Optical So-*

- ciety of America A*, 2010, 27(7): 1529-1534.
- [21] JARECKI Q, KUPINSKI M. Polarized representation for depolarization-dominant materials [J]. *Optics Express*, 2024, 32(5): 8262.
- [22] KONDO Y, ONO T, SUN L G, *et al.* Accurate polarimetric BRDF for real polarization scene rendering [C]. *Computer Vision-ECCV 2020. Cham*: Springer, 2020: 220-236.
- [23] OMER K, KUPINSKI M. Compression, interpolation, and importance sampling for polarized BRDF models [J]. *Optics Express*, 2022, 30(14): 25734.
- [24] HAN Y F, ZHOU C, LYU Y W, *et al.* PolGS++: Physically-guided Polarimetric Gaussian Splatting for Fast Reflective Surface Reconstruction [EB/OL]. 2026: *arXiv*: 2603.10801. <https://arxiv.org/abs/2603.10801>
- [25] LI C, ONO T, UEMORI T, *et al.* NeISF: Neural incident Stokes field for geometry and material estimation [J/OL]. *arXiv*, 2023, *arXiv*: 2311.13187 [2026-09-28]. <https://arxiv.org/abs/2311.13187>.

作者简介:



李庚鹏(1995—),女,山西长治人,博士研究生,2022年于西安邮电大学获得硕士学位,主要从事光电防护方面的研究。E-mail: lgp15535563573@163.com

通讯作者:



蔡伟(1974—),男,陕西西安人,博士,教授,主要从事光电防护方面的研究,2004年获西安交通大学博士,研究方向为定位定向与光电防护研究。E-mail: XHYU807@outlook.com