

文章编号 1004-924X(2024)24-3632-12

兼顾位置分布及测量精度的坐标转换公共点 优选方法

刘忠贺, 李宗春*, 何 华

(信息工程大学 地理空间信息学院, 河南 郑州 450001)

摘要:坐标转换质量受公共点位置分布及测量精度等多因素影响。为提升坐标转换效果,设计了一种兼顾位置分布和测量精度的公共点优选方法。首先,利用抗差估计方法处理数据,剔除粗差;然后,将剩余同名点重心化,按象限分组,计算同名点在所属象限中轴线上的投影长度并排序,选择各象限投影长度较大的部分点作为待采样点集;其次,遍历待采样点集,从每组点集中抽取至少一个同名点,获取多个组合,计算每个组合的误差方程系数矩阵条件数及坐标转换的内符合精度;最后,取部分条件数较小组合中内符合精度最高的组合作为最优组合。通过仿真试验与实例分析验证方法性能,结果表明,同文献[24]、[28]相比,所提方法内外符合精度更优,坐标转换质量更高,具有稳健性。

关键词:坐标转换;公共点;抗差估计;象限;重心化

中图分类号:P258 文献标识码:A doi:10.37188/OPE.20243224.3632

An optimization method for selecting common points considering position distribution and measuring precision in coordinate transformation

LIU Zhonghe, LI Zongchun*, HE Hua

(Institute of Geospatial Information, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

* Corresponding author, E-mail: 13838092876@139.com

Abstract: The quality of coordinate transformation is influenced by geometric position distribution and measurement errors of common points. In order to improve the effectiveness of coordinate transformation, a method for selecting common points that takes into account position distribution and measurement precision is designed. Firstly, robust estimation method is adopted to process the data and eliminate gross errors. Secondly, centroid the remaining homonymous points, divide them into multiple sets of points based on different quadrants, calculate the projection length of the homonymous points on the central axis of their respective quadrants, and sort them. Proportionally select the points with larger projection lengths in the point sets as the points to be sampled. Thirdly, traverse the set of points to be sampled and extract homonymous points, calculate the conversion precision and coefficient matrix condition number of each group of points. Finally, take the combination with the highest internal compliance accuracy among the smaller number of conditions as the common points. The performance of the method is verified by simulation ex-

收稿日期:2024-07-08;修订日期:2024-09-12.

基金项目:大型加速器工程精密三维控制网建立技术研究(No. 41974216)

periments and case analysis. The results show that compared with references [24] and [28], the proposed method has better compliance accuracy in both internal and external. The quality of coordinate transformation of this method is higher, and it has robustness.

Key words: coordinate transformation; common point; robust estimation; quadrant; centralization

1 引言

三维坐标转换可在不改变控制点相对空间位置的情况下实现不同坐标系之间的转换,这种刚性变换广泛应用于大地测量和工程测量领域。在粒子加速器设备的安装调整过程中,公共点的合理选择是激光跟踪仪准确复现安装测量坐标系的关键。常用模型有七参数模型^[1-2]、四元数模型^[3]以及基于罗德里格矩阵与反对称阵模型^[4-5]。各模型区别在于对旋转矩阵的描述不同,参数间可互相转换,结果别无二致。

坐标转换质量受公共点位置分布、数量及测量精度^[6-7]等综合因素影响。不考虑系统误差和粗差情况下,假设测量误差服从正态分布,最小二乘法(Least Squares, LS)可以对参数作出最优估计。但实际应用中,测量误差分布规律复杂,不易通过数学模型准确表达,且数据中可能包含粗差,而LS对异常值十分敏感,此时无法对参数作出有效估计。粗差的处理方案大致分为粗差探测^[8-9]和抗差估计^[10-11],主要通过剔除粗差或降低含粗差观测值的权重减小异常值对参数估计的干扰,后者针对单个含粗差的观测值进行降权,处理方式更为平和且数据利用率高。基于M估计方法,又发展出了高崩溃污染率的稳健估计算法^[12-13]。坐标转换时,公共点误差一部分在残差中得以反映,而另一部分则在参数估计过程中被吸收,影响参数的估计精度,且误差吸收程度主要受公共点位置分布的影响^[14]。当点位分布位置条件较差时,平移参数与旋转参数间存在强相关性,误差方程系数矩阵条件数很大,导致解算模型病态化,文献[15]采用正则化解法计算坐标转换参数。文献[16-17]通过试验表明,公共点分布范围越广越均匀,坐标转换精度越高越稳定,且在公共点均匀分布情况下,增加其数量能进一步提高转换精度;此外,距离公共点越近的转换点,其转换精度越高。文献[18-19]分别利用最小二乘不等精度估计理论和改进的Shepard

差值模型,得出坐标转换精度受公共点测量精度及其位置分布的影响规律,公共点分布散乱情况下,盲目增加公共点的数量反而会降低坐标转换的效益。利用激光跟踪仪测量系统建立大尺寸、高精度三维控制网^[20-21]过程中,坐标转换或点位交会精度受测量点空间位置分布的影响。文献[22]构建了激光跟踪仪测量系统的加权几何精度因子模型,分析测量点分布对点位交会精度的影响规律,通过选取空间有利位置,有效提高了控制网的精度。文献[23]提出利用面积分析法选取公共点,通过计算平面内任意3个点构成的三角形面积,选取最大面积对应的点作为公共点,该方法效率较低,且公共点数量较少时难以保证坐标转换的精度。为了使所选公共点的范围更广和均匀,文献[24]设计了基于象限分布的公共点选取方法,以各象限最外围点与中心点距离均值为半径绘制圆(球),根据外围点到圆(球)的平均距离确定搜索区域,选择搜索区域到中轴线距离最近的点作为公共点,该方法所选公共点分布范围广,均匀性较好,但忽视了点的测量误差,有待完善。文献[25]基于独占圆思想^[26-27],利用公共点独占圆半径中误差来表示其均匀度,试验表明公共点分布范围越广,均匀度越高,其外符合精度越高。文献[28]基于独占圆思想,将公共点独占圆半径投影至各轴并计算投影后独占圆面积和,然后通过加权、分层等操作选取公共点,提高了粒子加速器关键元件预准直的精度和效率,但仅适用于公共点数量较少、均匀度差异不大且位置分布局限在一定空间内的情况,选点时亦未顾及公共点的测量误差。

以上研究表明,不考虑系统误差和粗差情况下,在测区范围内选择数量一定、范围较广且均匀分布的公共点,可以有效提高坐标转换的效益^[29-30]。部分已有方法在选点时仅考虑位置分布或测量误差单方面因素的影响,但鲜有同时顾及两者综合因素影响的研究。因此,本文提出一种顾及位置分布和测量精度的公共点优选方法。

利用抗差估计方法对数据进行预处理,剔除粗差,避免在选点时受其干扰;通过重心化措施将数据所在空间分割成 8 个部分,使同名点位置分布趋于均匀;依据同名点在中轴线的投影长度筛选靠近外围的点,使得选取的公共点分布范围更广;采用抽样的方式进行选点,以保证点的均匀性;基于系数矩阵的条件数大小确定备选组合,以保证较高的外符合精度;选取备选组合中内符合精度最高的组合为最优组合,使公共点具有较高的测量精度。通过仿真试验和实例分析,研究坐标转换精度的影响因素并验证方法性能。

2 公共点选取方法

合理选取公共点是保证坐标转换质量的关键。其中,公共点测量误差是坐标转换内符合精度的主要影响因素,而公共点位置分布则主要制约坐标转换的外符合精度,二者共同决定了坐标转换的质量。因此,本文方法在选点时重点关注其位置分布和测量精度。

2.1 坐标转换模型

七参数坐标转换模型对参数初值要求不高,且不受旋转角的限制,可表示为:

$$X_U = T + \lambda R X_O, \quad (1)$$

其中: $X_U = [X, Y, Z]^T$ 与 $X_O = [X, Y, Z]^T$ 分别表示目标坐标系和原坐标系下公共点的三维坐标; $T = [T_X, T_Y, T_Z]^T$ 为平移参数; λ 为尺度参数; R 为旋转矩阵。

对式(1)线性化^[2],得误差方程:

$$V = B\hat{x} - L, \quad (2)$$

其中: V 为坐标改正数(残差); B 为系数矩阵; $\hat{x} = (\delta T_X, \delta T_Y, \delta T_Z, \delta \lambda, \delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma)^T$ 为参数改正数; L 为常数项。

基于 LS 估计,采用高斯-牛顿迭代法求解参数:

$$\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P L, \quad (3)$$

其中, P 为观测值权阵。

系数矩阵 B 的条件数 $\text{Cond}(B)$ 可以体现参数解的稳定性,条件数越小,参数对测量误差越不敏感,表明系数矩阵为良态,能够从一个侧面反映控制网结构坚固程度^[31],表示为:

$$\text{Cond}(B) = \|B\| \cdot \|B^{-1}\|, \quad (4)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 2 范数运算符。

借鉴控制网可靠性理论^[32],用以辅助分析公共点的位置分布情况。可靠性矩阵由 W 表示,即:

$$W = I - B(B^T P B)^{-1} B^T P. \quad (5)$$

W 对角线元素,即多余观测分量 W_{ii} , 是一种观测结构的内部可靠性度量,其数值越大,说明图形强度越强,公共点相对位置分布条件越好。

2.2 公共点优选方法

为便于区分,称最终被选取并参与坐标转换的同名点为公共点。全部同名点参与坐标转换不仅可能使坐标转换精度无法达到最优,而且降低了效率,增加了成本,合理挑选适量的测量精度高、位置分布广且均匀的公共点是提升坐标转换效益的关键。公共点测量误差是坐标转换内符合精度的主要影响因素,而公共点位置分布则主要制约坐标转换的外符合精度,二者共同决定了坐标转换的质量。因此,本文设计了一种顾及位置分布及测量精度的公共点优选方法,以下给出具体操作流程。

2.2.1 剔除粗差

为避免粗差的干扰,采用抗差估计方法对数据进行预处理,识别并剔除粗差。

将两套坐标下所有同名点坐标作为观测值,在解算坐标转换参数时,将式(3)中的 P 替换为等价权 $\bar{P} = \text{diag}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_j, \dots, \bar{p}_n)$, n 为观测值个数。以 IGG3 为等价权函数,对于第 j 个观测值,其等价权表示为:

$$\bar{p}_j = \begin{cases} p_j & |\tilde{v}_j| \leq k_0 \\ p_j \frac{k_0}{|\tilde{v}_j|} \left(\frac{k_1 - |\tilde{v}_j|}{k_1 - k_0} \right)^2 & k_0 = |\tilde{v}_j| \leq k_1 \\ 1.0 \times 10^{-10} & |\tilde{v}_j| \leq k_1 \end{cases} \quad (6)$$

其中: $p_{j, (j=1, 2, \dots, n)} = 1$ 为先验权; $\tilde{v}_j = v_j / (\sigma_0 \sqrt{q_{v_j}})$ 为标准化残差; σ_0 为单位权中误差,由中位数法^[11]估计; q_{v_j} 为残差协因数阵 $Q_{vv} = Q - B Q_{xx} B^T$ 的对角线元素; k_0 和 k_1 为常量,取 $k_0 = 1.0$, $k_1 = 3.0$ 。当 $\tilde{v}_j$ 大于 k_1 时,视观测值为粗差,剔除对应的同名点。

2.2.2 确定待采样点集

为保证公共点的均匀性,首先将同名点

$(X_i, Y_i, Z_i)(i=1, 2, \dots, m)$ 重心化,即:

$$\begin{cases} \bar{X}_i = X_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_j \\ \bar{Y}_i = Y_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j, \\ \bar{Z}_i = Z_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Z_j \end{cases} \quad (7)$$

其中: $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ 为第*i*个同名点的重心化坐标; (X_j, Y_j, Z_j) 为第*j*个同名点坐标;*m*为同名点数量。

然后,依据象限对重心化后的同名点分组,以此来表征其位置分布。同名点重心化前后位置分布如图 1 所示。

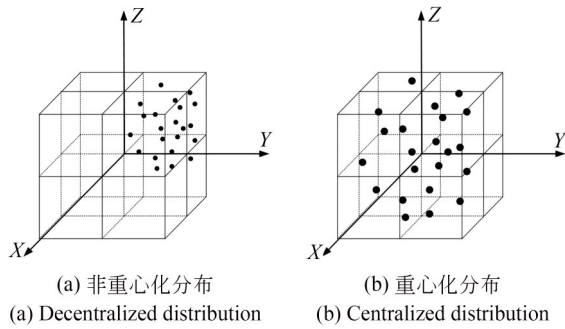


图 1 同名点位置分布

Fig. 1 Distribution of homonymous points

从图 1 可以看出,经过重心化,同名点能够较为均匀地分布在各个象限。此时,同名点所处空间被分割成 8 个部分,点的位置被赋予了空间特征。

根据同名点重心化坐标所在象限对其进行分组,以象限中轴线方向为主方向,计算所有同名点在对应象限中轴线 $l_g (g=1, 2, \dots, 8)$ 的投影长度 iS_g ,显然,越靠近外围且接近中轴线的点,其投影长度越大。以第一象限为例,假如第*i*个同名点位于该象限,则其投影长度为:

$$^iS_1 = (\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i) \cdot l_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} (\bar{X}_i + \bar{Y}_i + \bar{Z}_i). \quad (8)$$

为了使选取的公共点分布范围更广,依据投影长度对每组点集中的同名点进行排序并优先选择靠近外围的点。统计各象限点的数量,为了使选取的公共点分布更加均匀,按照比例 $k (0 < k < 1)$ 选取各象限中轴线投影长度较大的点作为

待采样点,*k*的取值与点的数量有关,同名点数量较多时,可适当减小*k*值,同名点数量较少时,可适当增大*k*值。假设第*g*象限包含 a_g 个点,则取该象限 N_g 个点作为待采样点,则:

$$N_g = [k \cdot a_g], \quad (9)$$

其中, $[\cdot]$ 表示向上取整运算符。此时,若象限内存在同名点,可以保证至少选取一个点。

2.2.3 确定最优组合

遍历待采样点集并从每组点集中抽取 *b* 个点,抽取的同名点总数至少为 3,然后计算每种组合对应误差方程系数矩阵条件数 $\text{Cond}(B)$ 及坐标转换精度。当公共点数量较多时,该过程耗时较长,一定程度上会影响计算效率。坐标转换精度由内符合精度 σ_m 表示,物理含义为参与坐标转换的公共点在两坐标系下的契合程度,具体通过参与坐标转换的同名点坐标分量残差的均方根值计算,即:

$$\sigma_m = \pm \sqrt{\frac{V^T V}{24b}}, \quad (10)$$

其中,*V*即为每种组合对应同名点坐标分量的残差。

相对而言,系数矩阵条件数较小的组合对应的同名点位置分布条件更佳,所以依据 $\text{Cond}(B)$ 对 *h* 个组合从小到大排序,设定阈值 ϵ ,即:

$$\epsilon = \min(\text{Cond}(B_i)) + 0.2(\max(\text{Cond}(B_i)) - \min(\text{Cond}(B_i))) = 0.2\text{Cond}(B_h) + 0.8\text{Cond}(B_1). \quad (11)$$

其中, $i=1, 2, \dots, h$ 。

为保证所选公共点具有良好的位置分布,选取 $\text{Cond}(B) < \epsilon$ 的组合(设有 *c* 组)作为备选组合。

顾及点的位置分布情况下,经过上述筛选,所得备选组合中同名点中不包含粗差且均具有良好的位置分布条件,但由于未顾及测量误差因素,所以可能存在误差较大点。为尽量避免误差较大点被选为公共点,选取 *c* 组备选组合中 σ_m 最高的组合作为最优组合,以保证坐标转换的质量,组合中的同名点即为最终参与坐标转换的公共点。

3 算例分析

3.1 仿真试验

为验证方法有效性,设计了仿真试验,主要目的是研究位置分布对坐标转换的影响和对比分析不同方法选点组合的优劣。

3.1.1 位置分布对坐标转换的影响

为了探究位置分布对坐标转换的影响,在空间内模拟了8组(每组65个点)共520个控制点,对称分布在8个象限,作为第一期数据,如图2(a)所示。

每个象限包含64个公共点和1个检验点,以检验点为中心,公共点在3 m×3 m×3 m正方体范围内均匀分布,如图2(b)所示,检验点坐标示于表1。

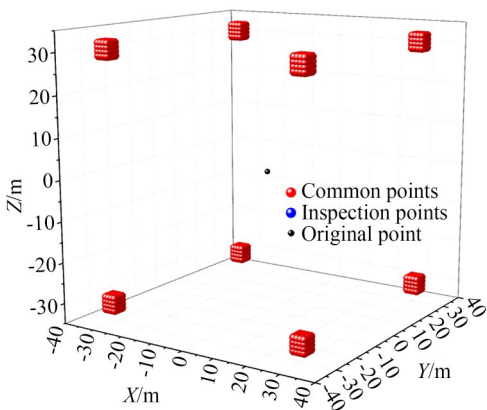
在第一期数据基础上,尺度保持不变,首先沿X,Y,Z方向分别平移10.000 m,5.000 m,

表1 检验点坐标

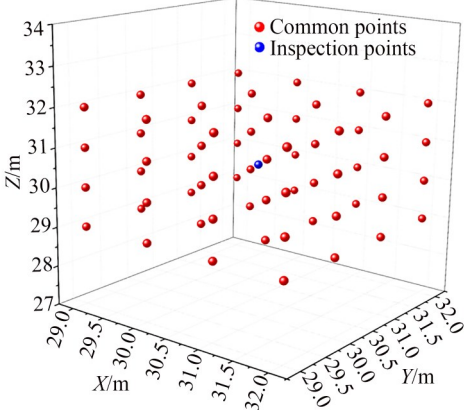
Tab. 1 Coordinates of inspection points

Point name	X/m	Y/m	Z/m
C_1	30.500	30.500	30.500
C_2	-30.500	30.500	30.500
C_3	-30.500	-30.500	30.500
C_4	30.500	-30.500	30.500
C_5	30.500	30.500	-30.500
C_6	-30.500	30.500	-30.500
C_7	-30.500	-30.500	-30.500
C_8	30.500	-30.500	-30.500

8.000 m;然后沿X,Y,Z轴分别旋转0.3 rad,0.4 rad,0.5 rad;最后,为使公共点极限误差椭球之间不相交,按照均值为0、标准差为0.020 m的高斯噪声向坐标中添加随机误差,得到第二期数据。检验点不添加随机误差。



(a) 控制点分布
(a) Distribution of control points



(b) 第一象限控制点分布
(b) Distribution of control points in the first quadrant

图2 控制点几何位置分布

Fig. 2 Geometric position distribution of control points

为了分析公共点几何位置分布对坐标转换精度的影响,采用控制变量法,设定公共点个数为8,设计以下4种方案,每种方案试验5 000次。

- 方案①:从第一象限随机挑选8个公共点;
- 方案②:从第一、二象限分别随机挑选4个公共点;
- 方案③:从第一至第四象限分别随机挑选2个公共点;
- 方案④:从第一至第八象限分别随机挑选1

个公共点。
所有检验点在两坐标系下的契合程度由坐标转换外符合精度 σ_{out} 表示,具体通过检验点坐标分量转换残差的均方根值计算,即:

$$\sigma_{out} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^u ((dx_i)^2 + (dy_i)^2 + (dz_i)^2)}{3u}}, \quad (12)$$

其中: u 为检验点数量; dx, dy, dz 分别为检验点在X,Y,Z三个方向的转换残差。

将 4 种方案所得条件数 $\text{Cond}(B)$ 、多余观测分量最小值 $W_{\min}=\min(W_{ii})$ 、内符合精度 σ_{in} 及外符合精度 σ_{out} 的数值区间(RG)、均值(AVE)及标准差(SD)示于表 2。

表 2 统计结果
Tab. 2 Statistical results

Scheme	Statistic	Cond(<i>B</i>)	<i>W</i> _{min}	σ_{in} /m	σ_{out} /m
①	RG	(1 585,5 239)	(0.22,0.65)	(0.023,0.088)	(0.060,2.915)
	AVE	2 607	0.51	0.051	0.990
	SD	434	0.07	0.010	0.415
②	RG	(1 315,3 911)	(0.30,0.67)	(0.020,0.095)	(0.009,2.762)
	AVE	1 917	0.56	0.050	0.452
	SD	302	0.05	0.010	0.353
③	RG	(72,78)	(0.62,0.65)	(0.023,0.091)	(0.010,0.100)
	AVE	75	0.64	0.050	0.041
	SD	1	0.00	0.009	0.013
④	RG	(51,54)	(0.67,0.69)	(0.020,0.097)	(0.007,0.064)
	AVE	53	0.68	0.050	0.032
	SD	0	0.00	0.009	0.009

观察表 2,对表中结果作如下分析。

方案①和方案②:公共点密集分布或近似直线分布情况下,系数矩阵条件数 $\text{Cond}(B)$ 较大,参数更易受到测量误差的干扰,导致解不稳定^[26]。当多余观测分量均超过 0.5 时,认为观测结构较好,网形较为坚固^[8],而 $W_{\min}$ 统计量中,均出现小于 0.5 的组合,且最小接近 0.22,表明存在公共点分布不合理的情形,坐标转换外符合精度低。

方案③和方案④:公共点大致呈长方形或长方体均匀分布情况下, $\text{Cond}(B)$ 较小,系数矩阵良态,参数解更加稳定。 $W_{\min}$ 均大于 0.5,表明网形内部可靠性高,公共点位置分布良好。

方案①至方案④: $\text{Cond}(B)$ 随着公共点位置分布条件的变好而变小, $W_{\min}$ 随着公共点位置分布条件的变好而变大,二者均能从不同侧面准确反映公共点的位置分布情况。4 种方案内符合精度统计量基本一致,AVE(σ_{in})约为 0.050 m,说明公共点精度一致且数量一定情况下,其几何分布对 σ_{in} 影响较小。反观外符合精度,在方案①和方案②中,公共点分布密集或图形条件较差时, σ_{out} 最大分别达到 2.915 m 和 2.762 m,坐标转换效果较差。随着公共点分布范围愈广、愈均匀, σ_{out} 不断减小,精度不断提高。

综上, σ_{in} 与公共点测量误差密切相关, σ_{out} 则主要受公共点位置分布的影响。坐标转换质量由公共点测量误差和位置分布共同决定,当公共点测量误差较小时,其良好的分布条件不仅可以得到稳定的参数解,而且可以保证较高的坐标转换质量。所以,坐标转换时须首先顾及公共点的位置分布,尽量选取分布范围广、均匀且测量精度高的点。

3.1.2 本文方法效果检验

公共点测量精度一致且均匀分布情况下,坐标转换精度随数量的增加不断提高^[25],而实际中,公共点位置分布一般较为离散,测量精度也可能不同。因此,为验证所提方法性能,在 20 m×20 m×20 m 空间内模拟了 68 个点,包含 60 个同名点和 8 个检验点,同名点位置随机分布,如图 3 所示。

第一期数据基础上,尺度保持不变,首先沿 X,Y,Z 方向分别平移 10.000 m,5.000 m,8.000 m;然后沿 X,Y,Z 轴分别旋转 0.3 rad,0.4 rad,0.5 rad,生成第二期数据。考虑到实际中同名点的测量精度可能不一致,向第二期数据中添加均值为 0、标准差分别为 0.020 m,0.040 m,0.060 m 的随机误差,各占 1/3,检验点不添加随机误差。

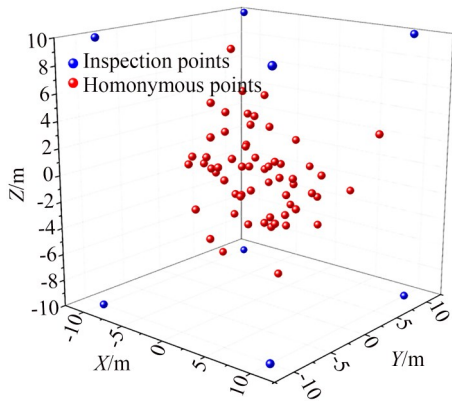


图3 控制点位置分布

Fig. 3 Location distribution of control points

计算所有同名点坐标分量转换残差的均方根值并由 σ_{total} 表示,即:

$$\sigma_{\text{total}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m ((dX_i)^2 + (dY_i)^2 + (dZ_i)^2)}{3m}}, \quad (13)$$

其中: dX, dY, dZ 分别为同名点在 X, Y, Z 三个方向的转换残差; m 为同名点数量。

转换残差可以表征坐标转换参数计算结果与理论值的接近程度。假设两坐标系理论转换矩阵为 $\bar{D}$, 经算法所得转换矩阵为 D , 则转换残差为:

$$\Delta D = D(\bar{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta R & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad (14)$$

其中: ΔR 和 ΔT 分别为旋转残差分量和平移残差分量, 则相应的旋转误差 E^r 和平移误差 E^t 可表示为:

$$\begin{cases} E^r = \arccos\left(\frac{\text{tr}(\Delta R) - 1}{2}\right) \\ E^t = \|\Delta T\| \end{cases} \quad (15)$$

将 LS 法、抗差法(文献[11]和文献[12])、文献[24]、文献[28]、本文方法及本文方法的退化算法(取消对公共点位置分布的考虑, 只顾及内符合精度)的计算结果示于表 3。其中, 本文方法取 $k=0.5$, b 分别取值 1 和 2; 将 $\text{AVE}(\bar{S}), \sigma_{\text{total}}, E^r$ 及 E^t 一并列表 3。

观察表 3, b 取值为 1 时, 本文方法所选公共点平均投影长度最大, $\text{AVE}(\bar{S})$ 达到 6.777 m, 表明所选公共点的分布范围更广。从条件数来看, 7 种方法结果均在 10 以内, 图形条件良好, 参数

解均比较稳定。相比之下, 文献[28]条件数和多余观测分量结果最差, $W_{\min}$ 仅为 0.23, 表明公共点中存在位置分布条件较差的点, 而其他 6 种方法的 $W_{\min}$ 大于或等于 0.50, 表明参与坐标转换的点的相对位置条件良好。当所有同名点参与坐标转换时, 由于数据仅含随机误差, LS 法、文献[11]及文献[12]结果基本一致, 稳健估计算法未表现出优势, 说明数据质量较高, 与实际情况符合; 与此同时, 在受到所有点测量误差的影响下, 前 3 种方法内符合精度为 0.063 m, 低于后 4 种方法, 而外符合精度较高, 其中文献[12]的 σ_{out} 达到 0.020 m。对比分析前 6 种方法, 从内符合精度来看, 文献[24]和文献[28]均处于前 3 种方法和本文方法之间, 且文献[24]略优于文献[28]; 从外符合精度来看, 文献[24]和文献[28]效果较差, 其中, 文献[24]精度最低, 其 σ_{out} 仅为 0.112 mm。反观本文方法, 在综合考虑点的位置分布和测量精度情况下, σ_{in} 在 6 种方法中最优, 达到 0.035 m, 而 σ_{in} 为次优, 大小为 0.059 m。当 b 取值为 2 时, 本文方法所选公共点数量增加 1 倍, 平均投影长度和条件数均减小, $W_{\min}$ 由 0.51 增加到 0.74, 而 σ_{in} 降低为 0.045 m, σ_{out} 和 σ_{total} 分别提升至 0.055 m 和 0.067 m, 表明随公共点数量的增加, 外符合精度得以提升, 增强了坐标转换的可靠性, 然而, 内符合精度会因测量误差的影响而降低。另外, 仅顾及内符合精度时, σ_{in} 最优达到 0.017 m, 但 σ_{out} 为 0.161 m, 且 E^r 及 E^t 分别为 0.019 rad 和 0.222 m, 同其他方法相比, σ_{out} 和转换残差最差, 表明坐标转换不能仅顾及内符合精度。表 3 中指标 $\sigma_{\text{total}}, E^r$ 及 E^t 同 σ_{out} 反映的规律基本一致, 表明没有检验点情况下, 可由 σ_{total} 来表示外符合精度。

根据表 3, 文献[24]、文献[28]及本文方法挑选的 8 个公共点中, 51 号点是相同的。此外, 文献[28]和本文方法还同样选取了 11, 21, 23, 52 号点。为进一步探究本文方法的稳健性, 在 11, 23, 51 号点的 X 坐标分量上混入 0.300 m 的粗差, 将 6 种方法处理结果示于表 4。为避免粗差的影响, 剔除粗差后, 统计剩余同名点的 σ_{total} 。

结合表 3 和表 4, 混入少量粗差后, 由于 LS、文献[24]及文献[28]对粗差没有规避能力, 所

表 3 坐标转换结果

Tab. 3 Result of coordinate transformation

Method	Number	Point number	AVE($\bar{S}$)/m	Cond(B)	$W_{\min}$	$\sigma_{\text{in}}/\text{m}$	$\sigma_{\text{out}}/\text{m}$	$\sigma_{\text{total}}/\text{m}$	E'/rad	E''/rad
LS	60	1~60	4.194	5	0.85	0.062	0.022	0.062	0.002	0.021
Reference [11]	60	1~60	4.194	5	0.85	0.063	0.022	0.063	0.002	0.021
Reference [12]	60	1~60	4.194	5	0.85	0.063	0.020	0.063	0.002	0.020
Reference [24]	8	2,12,18,36,43,49,51,53	5.061	5	0.55	0.041	0.112	0.075	0.010	0.080
Reference [28]	8	11,13,21,23,49,51,52,53	6.174	10	0.23	0.049	0.077	0.076	0.007	0.121
	8	11,21,23,25,48,51,52,55	6.777	8	0.51	0.035	0.059	0.074	0.004	0.083
Proposed method	16	11,15,18,20,23,29,30,32,38,43,47,50,51,55,56,60	4.885	6	0.74	0.045	0.055	0.067	0.005	0.065
Only consider σ_{in}	8	11,21,29,37,41,45,49,56	4.578	7	0.50	0.017	0.161	0.088	0.019	0.222

表 4 坐标转换结果

Tab. 4 Result of coordinate transformation

Method	Number	Point number	AVE($\bar{S}$)/m	Cond(B)	$W_{\min}$	$\sigma_{\text{in}}/\text{m}$	$\sigma_{\text{out}}/\text{m}$	$\sigma_{\text{total}}/\text{m}$	E'/rad	E''/rad
LS	60	1~60	4.197	5	0.85	0.071	0.029	0.064	0.003	0.041
Reference [11]	60	剔除 11(X,Z),23(X),51(X)	4.197	5	0.85	0.064	0.029	0.064	0.003	0.041
Reference [12]	60	剔除 11(X,Z),23(X),51(X)	4.197	5	0.85	0.064	0.019	0.064	0.002	0.032
Reference [24]	8	2,12,18,36,43,49,51,53	5.083	6	0.55	0.067	0.112	0.077	0.012	0.089
Reference [28]	8	11,13,21,23,49,51,52,53	6.197	10	0.23	0.097	0.171	0.084	0.021	0.275
	8	3,15,18,32,41,43,50,56	4.298	6	0.59	0.033	0.087	0.072	0.010	0.080
Proposed method	16	1,2,8,10,15,16,18,31,41,43,45,49,50,53,56,58	4.225	5	0.76	0.046	0.070	0.068	0.008	0.072

以所选公共点未发生变化,AVE($\bar{S}$),Cond(B)及 $W_{\min}$ 基本不变,Cond(B)结果均在 10 以内,表明坐标转换参数的解依旧稳定,但由于受到粗差的影响,其 σ_{in} , σ_{out} 及 σ_{total} 总体变差,转换残差亦变大,文献[28]结果最差,其旋转和平移残差分别为 0.021 rad 和 0.275 m。文献[11]和文献[12]识别了 4 个粗差并准确找出了粗差的位置,表现出一定的稳健能力,由于粗差数量较少,在剔除粗差后, σ_{in} 和 σ_{total} 变化很小,同 LS 结果相当,文献[12]的 σ_{out} 仍为最优,达到 0.019 m,转换残差同样最优,表明方法稳健性较强。反观本文方法,在综合顾及位置分布和测量精度情况下,选取的公共点中不含粗差,表明该方法对粗差具有规避能力,具有稳健性。 $b=1$ 时,因粗差点的剔除导致 AVE($\bar{S}$)出现一定程度的降低, $W_{\min}$ 变大,从各项精度指标来看, σ_{in} 在 6 种方法中仍保持最优,达到 0.033 m, σ_{out} 和 σ_{total} 为次优,方法有效性得以验证。当 $b=2$ 时,选取的公共点数量增加 1 倍, $W_{\min}$ 从 0.59 增大到 0.76,可

靠性得以增强,转换残差变小,外符合精度得以提升,但由于测量误差的影响导致内符合精度有所降低。另外, σ_{total} , E' 及 E'' 同 σ_{out} 反映的规律具有一致性。

3.2 实例分析

采用两期某环形粒子加速器隧道控制网数据,控制点设置在房顶、墙面、地面、支柱等位置。其中,外墙点分布于环建筑最外侧走廊上,其稳定性较弱,有些点的位置可能在两期之间发生微小变形,为了测试方法有效性,以其为测试数据,共包含 65 个同名点,数据分布如图 4 所示。

从图 4 可以看出,控制网呈环形分布,由于文献[28]方法的局限性,不适用于隧道内数据的转换,将 LS 法、文献[11]、文献[12]、文献[24]、本文方法及本文方法退化算法的转换结果示于表 5。其中,本文方法取 $k=0.5$, b 分别取值 1 和 2。为避免粗差的干扰,剔除文献[11]识别的粗差,计算剩余同名点的 σ_{total} 。

观察表 5,LS、文献[11]、文献[12]将所有同

名点作为公共点进行坐标转换, $AVE(\bar{S})$, $Cond(B)$ 及 W_{min} 结果一致; 其中, 文献[11]识别出了 5 个粗差, 在剔除 5 个粗差后, σ_{in} 和 σ_{total} 与 LS 法和文献[12]基本一致, 表明粗差的量级较小。另外, 当所有点参与坐标转换时, 由于受到测量误差的影响, LS 法、文献[11]及文献[12]的内符合精度较差, 最低达到 0.39 mm, 低于文献[24]和本文方法, 但文献[11]及文献[12]的外符合精度最优, 仅为 0.37 mm。6 种方法中, 本文方法选取公共点的投影长度最大, 条件数最小, W_{min} 也超过 0.50, 反映出本文方法所选公共点的分布范围较广, 图形几何强度较高。当 b 取值为 1 时, 从内

外符合精度来看, σ_{in} 最高, 达到 0.24 mm, σ_{total} 低于前 3 种方法, 仅为 0.46 mm。当 $b=2$ 时, 公共点数量增加 1 倍, σ_{in} 因测量误差的影响降低至 0.27 mm, 而 σ_{total} 变高, 达到 0.44 mm, 表明公共点数量增加 1 倍后, 内符合精度会有一定程度降低, 而外符合精度有升高的趋势, 与表 3、表 4 反映的规律一致。仅顾及 σ_{in} 时, 内符合精度最高达到 0.12 mm, 但 $Cond(B)$ 和 W_{min} 分别为 1 220 和 0.23, 公共点位置分布较差, σ_{total} 仅为 0.96 mm, 表明坐标转换不能仅顾及内符合精度。另外, 本文方法选取的公共点中不包括粗差, 方法具有稳健性。

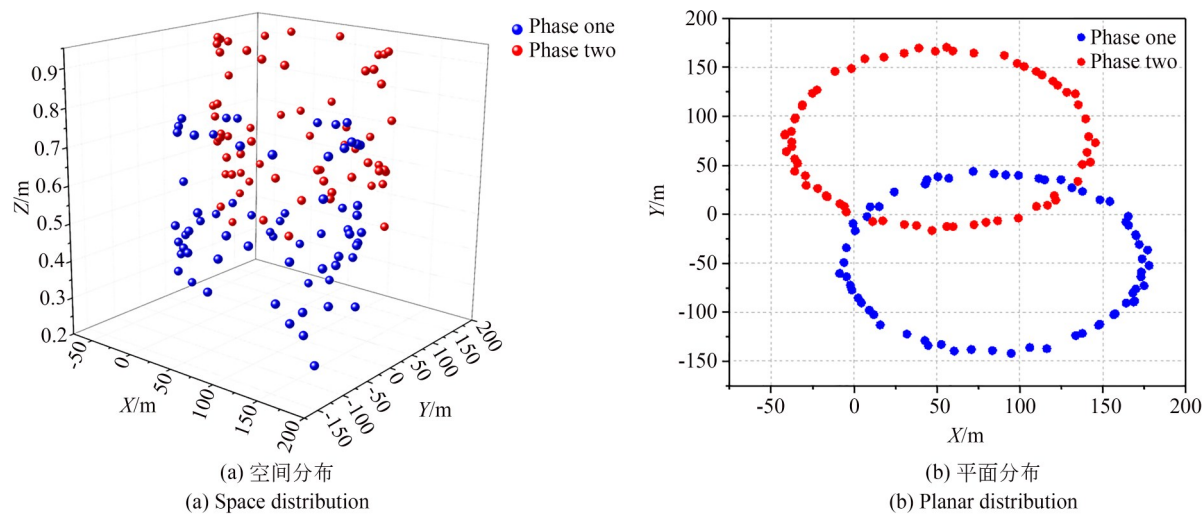


图 4 控制点位置分布

Fig. 4 Location distribution of control points

表 5 坐标转换结果

Tab. 5 Result of coordinate transformation

Method	Number	Point number	$AVE(\bar{S})/\text{m}$	$Cond(B)$	W_{min}	σ_{in}/mm	σ_{total}/mm
LS	65	1~65	66.59	263	0.95	0.39	0.38
Reference [11]	65	剔除 $Z(13,15), Y(55,56,57)$	66.59	263	0.95	0.37	0.37
Reference [12]	65	1~65	66.59	263	0.95	0.37	0.37
Reference [24]	8	4, 6, 22, 25, 29, 31, 59, 62	67.90	280	0.50	0.25	0.57
Proposed method	8	5, 6, 17, 20, 37, 40, 51, 59	70.91	218	0.57	0.24	0.46
	16	3, 5, 6, 8, 17, 19, 20, 21, 37, 39, 40, 49, 51, 54, 59, 60	71.19	224	0.77	0.27	0.44
	8	19, 23, 34, 39, 41, 43, 45, 49	64.86	1 220	0.23	0.12	0.96

综上, 本文方法在综合考虑公共点位置分布和测量精度条件下, 通过选取少量公共点获得较

优的坐标转换效果, 内符合精度达到最优, 外符合精度次优, 方法性能得以验证。

4 结 论

为提高坐标转换的效果,设计了一种同时顾及位置分布和测量精度的坐标转换公共点优选方法。该方法主要依据同名点的空间分布特征及测量误差选取公共点,通过仿真试验和实例分析对方法进行了验证,得出以下3点结论。

(1)公共点数量一定条件下,公共点分布范围越广、越均匀,坐标转换的外符合精度越高,而内符合精度主要由公共点的测量误差决定。随着选点数量的增加,本文方法内符合精度有所下降,而外符合精度逐渐提升。

(2)公共点的位置分布是制约外符合精度的关键因素,仅顾及公共点测量精度时,其内符合精度最优,但无法保证外符合精度,转换残差较大,坐标转换结果不可靠。本文方法可以抵抗粗差的干扰,选取的公共点测量误差小、分布范围广且均匀,兼顾内、外符合精度,坐标转换残差较小,结果可靠性更强。

(3)同现有方法相比,本文方法所选组合在中轴线的平均投影长度最大,公共点的分布范围更广,内符合精度最优,外符合精度次优,比LS、文献[11]及文献[12]效率更高。选点数量一致情况下,同文献[24]和文献[28]相比,本文方法坐标转换内外符合精度更优,且具有稳健性。

参考文献:

- [1] 陈义,沈云中,刘大杰. 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(12): 1101-1105.
CHEN Y, SHEN Y Z, LIU D J. A simplified model of three dimensional-datum transformation adapted to big rotation angle[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(12): 1101-1105. (in Chinese)
- [2] 姚宜斌,黄承猛,李程春,等. 一种适用于大角度的三维坐标转换参数求解算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(3): 253-256.
YAO Y B, HUANG C M, LI C C, *et al.* A new algorithm for solution of transformation parameters of big rotation angle's 3D coordinate[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(3): 253-256. (in Chinese)
- [3] 吕志鹏,伍吉仓,公羽. 利用四元数改进大旋转角坐标变换模型[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(4): 547-553.
LÜ Z P, WU J C, GONG Y. Improvement of a three-dimensional coordinate transformation model adapted to big rotation angle based on quaternion[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(4): 547-553. (in Chinese)
- [4] 刘磊,何占国,郑作亚,等. 大角度三维坐标转换参数的一种迭代解法[J]. 测绘科学, 2021, 46(6): 65-69, 76.
LIU L, HE Z G, ZHENG Z Y, *et al.* An iterative algorithm for solving the transformation parameters of big rotation angle's 3D coordinate[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2021, 46(6): 65-69, 76. (in Chinese)
- [5] 姚吉利,韩保民,杨元喜. 罗德里格矩阵在三维坐标转换严密解算中的应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(12): 1094-1096, 1119.
YAO J L, HAN B M, YANG Y X. Applications of lodrigues matrix in 3D coordinate transformation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2006, 31(12): 1094-1096, 1119. (in Chinese)
- [6] KUTOGLU H S, MEKİK C, AKCİN H. Effects of errors in coordinates on transformation parameters[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2003, 129(3): 91-94.
- [7] KUTOGLU H S, VANÍČEK P. Effect of common point selection on coordinate transformation parameter determination[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2006, 50(4): 525-536.
- [8] 欧吉坤. 粗差的拟准检定法(QUAD法)[J]. 测绘学报, 1999, 28(1): 15-20.
OU J K. Quasi-Accurate Detection of gross errors (QUAD)[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1999, 28(1): 15-20. (in Chinese)
- [9] QU W, CHEN H L, ZHANG Q, *et al.* A robust estimation algorithm for the increasing breakdown point based on quasi-accurate detection and its application to parameter estimation of the GNSS crustal deformation model[J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 95(11): 125.
- [10] 郭建锋. 尺度因子的MAD估计及其在测量平差

- 中的应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2021, 46(11): 1636-1640.
- GUO J F. MAD estimate of scale factor and its applications in measurement adjustment[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(11): 1636-1640. (in Chinese)
- [11] 杨玲, 沈云中, 楼立志. 基于中位参数初值的等价权抗差估计方法[J]. 测绘学报, 2011, 40(1): 28-32.
- YANG L, SHEN Y Z, LOU L Z. Equivalent weight robust estimation method based on Median parameter estimates[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(1): 28-32. (in Chinese)
- [12] LIU Z H, LI Z C, HE H, *et al.* Robust solution of coordinate transformation parameters with a high breakdown point [J]. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34(9): 095021.
- [13] XU P L. Sign-constrained robust least squares, subjective breakdown point and the effect of weights of observations on robustness[J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79(1): 146-159.
- [14] KUTOGLU H S, AYAN T. The role of common point distribution in obtaining reliable parameters for coordinate transformation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 176(2): 751-758.
- [15] 沈云中, 胡雷鸣, 李博峰. Bursa模型用于局部区域坐标变换的病态问题及其解法[J]. 测绘学报, 2006, 35(2): 95-98.
- SHEN Y Z, HU L M, LI B F. Ill-posed problem in determination of coordinate transformation parameters with small area's data based on bursa model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2006, 35(2): 95-98. (in Chinese)
- [16] 王玉成, 胡伍生. 坐标转换中公共点选取对于转换精度的影响[J]. 现代测绘, 2008, 31(5): 13-15.
- WANG Y C, HU W S. Influence caused by public point selection on accuracy of coordinate conversion [J]. *Modern Surveying and Mapping*, 2008, 31(5): 13-15. (in Chinese)
- [17] 赵宝锋, 张雪, 蒋廷臣. 坐标转换模型及公共点选取对转换成果精度的影响[J]. 淮海工学院学报(自然科学版), 2009, 18(4): 54-56.
- ZHAO B F, ZHANG X, JIANG T C. Effect of coordinate conversion model and the selected common points on the accuracy of conversion results [J]. *Journal of Jiangsu Ocean University (Natural Science Edition)*, 2009, 18(4): 54-56. (in Chinese)
- [18] 张皓琳, 林嘉睿, 郝继贵. 三维坐标转换精度及影响因素的研究[J]. 光电工程, 2012, 39(10): 26-31.
- ZHANG H L, LIN J R, ZHU J G. Three-dimensional coordinate transformation accuracy and its influencing factors [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2012, 39(10): 26-31. (in Chinese)
- [19] 周跃寅, 潘国荣. 公共点分布对坐标转换精度的影响[J]. 大地测量与地球动力学, 2013, 33(02): 105-109.
- ZHOU Y Y, PAN G R. Accuracy of coordinate transfer influenced by different distributions of common points [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2013, 33(02): 105-109. (in Chinese)
- [20] 李辉, 刘巍, 张洋, 等. 激光跟踪仪多基站转站精度模型与误差补偿[J]. 光学精密工程, 2019, 27(4): 771-783.
- LI H, LIU W, ZHANG Y, *et al.* Model establishment and error compensation of laser tracker station-transfer [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2019, 27(4): 771-783. (in Chinese)
- [21] REN Y, LIN J R, ZHU J G, *et al.* Coordinate transformation uncertainty analysis in large-scale metrology[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2015, 64(9): 2380-2388.
- [22] 丁克良, 靳婷婷, 蒋志强, 等. 三维多点交会点空间分布优化与精度分析[J]. 光学精密工程, 2021, 29(4): 691-700.
- DING K L, JIN T T, JIANG Z Q, *et al.* Optimization and accuracy analysis of point spatial distribution based on three-dimensional multi-point intersection [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2021, 29(4): 691-700. (in Chinese)
- [23] 尹晖, 王晶晶, 田鑫. 三维空间基准转换公共点选取的新方法[J]. 测绘地理信息, 2016, 41(2): 14-17.
- YIN H, WANG J J, TIAN X. Common points selection in 3D datum transformation [J]. *Journal of Geomatics*, 2016, 41(2): 14-17. (in Chinese)
- [24] 李金涛, 王微, 石波. 坐标系转换中基于象限分布的公共点选取方法[J]. 测绘工程, 2018, 27(7): 66-70.
- LI J T, WANG W, SHI B. Common point selection

- tion in coordinate transformation based on the distribution in quadrant [J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2018, 27(7): 66-70. (in Chinese)
- [25] 贺俊凯,徐东升,王明远,等.顾及控制点空间分布的坐标转换模型研究[J].*全球定位系统*, 2022, 47(1): 18-22.
HE J K, XU D S, WANG M Y, *et al.* Research on coordinate transformation model considering the spatial distribution of control points [J]. *GNSS World of China*, 2022, 47(1): 18-22. (in Chinese)
- [26] 罗传文.点空间分析:分维与均匀度[J].*科技导报*, 2004, 22(10): 51-54.
LUO C W. Point spatial analyses-fractal dimension and uniform index[J]. *Science & Technology Review*, 2004, 22(10): 51-54. (in Chinese)
- [27] 陆权.点集空间分布特征的分形描述方法[D].成都:西南交通大学, 2019.
LU Q. *Fractal Description Method of Spatial Distribution Characteristics of Point Sets* [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2019. (in Chinese)
- [28] DING T, HE X Y, WANG W, *et al.* A common points selection method based on the uniformity of FLTMMs for pre-alignment of particle accelerators [J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2024, 1062: 169147.
- [29] TAN Q M, LU N G, DONG M L, *et al.* Influence of geometrical distribution of common points on the accuracy of coordinate transformation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 221: 411-423.
- [30] TAN Q M, GAO S, LI D L, *et al.* Determination of reasonable geometrical distribution of markers for accurate motion parameters of rigid body [C]. 2013 *IEEE 11th International Conference on Electronic Measurement & Instruments*. Harbin, China. IEEE, 2013: 1033-1037.
- [31] 黄维彬.近代平差理论及其应用[M].北京:解放军出版社, 1992.
HUANG W B. *Modern Adjustment Theory and Its Application* [M]. Beijing: The People's Liberation Army Press, 1992. (in Chinese)
- [32] 李宗春,张冠宇,冯其强,等.工程测量学[M].北京:科学出版社, 2024.
LI Z C, ZHANG G Y, FENG Q Q, *et al.* *Engineering Surveying* [M]. Beijing: Science Press, 2024. (in Chinese)

作者简介:



刘忠贺(1995—),男,河南濮阳人,博士研究生,2017年获得河南理工大学学士学位,2020年获得信息工程大学硕士学位,主要从事精密工程测量方面的研究。E-mail: 2936054806@qq.com

通讯作者:



李宗春(1973—),男,山东日照人,教授,博士生导师,1998年于解放军测绘学院获得硕士学位,2003年于解放军信息工程大学获得博士学位,主要从事精密工程测量、三维激光点云数据处理等方面的教学与科研。E-mail: 13838092876@139.com